

def. 12: Sejam $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[F]{G} \mathcal{D}$.

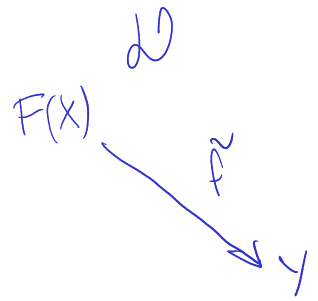
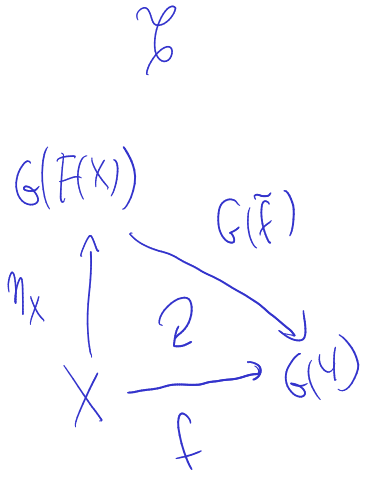
Dizemos $F \dashv G$ se

$$\exists \eta: \text{id}(\mathcal{C}) \rightarrow F; G$$

$$\forall f: X \rightarrow_{\mathcal{C}} G(Y)$$

$$\exists! \tilde{f}: F(X) \rightarrow_{\mathcal{D}} Y$$

t.q. $f = \eta(X); G(\tilde{f})$



• η é chamada unidade da adjunção

• \tilde{f} é chamada de transposta da f

— x —

"Produto de A & B em \mathcal{C} "

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \\ & & \downarrow \\ A & \xleftarrow{\pi_0} & A \times B & \xrightarrow{\pi_1} & B \end{array}$$

"Fronteira algebras"

o produto

Suponha que \mathcal{C} tenha ^{todos} produtos

$$X : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$(A, B) \in \mathcal{O} \mapsto A \times B$$

$$(f, g) \in \mathcal{A} \mapsto f \times g : A \times B \rightarrow A' \times B'$$

$$(A, B)$$

$$(A', B')$$

$$A \xleftarrow{\pi_0} A \times B \xrightarrow{\pi_1} B \qquad A' \xleftarrow{\pi'_0} A' \times B' \xrightarrow{\pi'_1} B'$$

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{\pi_0} & A \times B & \xrightarrow{\pi_1} & B \\
 f \downarrow & & \swarrow & \searrow & \downarrow g \\
 A' & & f \times g = \langle \pi_0 \circ f, \pi_1 \circ g \rangle & & B' \\
 & & \downarrow & & \\
 & & A' \times B' & \xrightarrow{\pi'_1} & B' \\
 & \swarrow \pi'_0 & & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Tarefa: Provar que é functor!
Quando tem adj à esquerda?

Buscamos F : tal que $F \dashv X$
 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C}$

Como provar!

$$\exists \eta: \text{id}(\mathcal{C}) \rightarrow F; X$$

$$\forall f: A \rightarrow B \times C$$

$$\exists! \tilde{f}: F(A) \rightarrow (B|C) \\ \text{t.q.} \quad \tilde{f} = \eta(A); X(\tilde{f})$$

$$\cdot F(A) = (F_0(A), F_1(A))$$

$$\cdot \tilde{f}: (F_0(A), F_1(A)) \rightarrow (B, C)$$

$$\tilde{f}_0: F_0(A) \rightarrow B$$

$$\tilde{f}_1: F_1(A) \rightarrow C$$

Então ...

$$\exists \eta: \text{id}(X) \rightarrow F; X$$

$$\forall f: A \rightarrow B \times C$$

$$\exists! \tilde{f}_0: F_0(A) \rightarrow B, \tilde{f}_1: F_1(A) \rightarrow C$$

$$f = \eta(A); (\tilde{f}_0 \times \tilde{f}_1)$$

quem é F ? Não sei... defeito da def. de \dashv ?

def V3: Dados $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$, dizemos que $F \dashv G$

Se

"Em \mathcal{C} , a coleção de setas de tipo $X \rightarrow G(Y)$ "

e

"Em \mathcal{D} , a coleção de setas de tipo $F(X) \rightarrow Y$ "

são isomorfas (como "conjuntos"), naturalmente em X & Y

" \otimes que é" a categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$?

Objetos: pares de objetos de \mathcal{C}

Setas: pares de setas

$$\text{dom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}(f, g) = (\text{dom}_{\mathcal{C}}(f), \text{dom}_{\mathcal{D}}(g))$$