def v2: Sejam $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$.

Dizemos $F \dashv G$ se

$\exists\, \eta : id(\mathcal{C}) \longrightarrow F;G$

$\forall\, f : X \longrightarrow_{\mathcal{C}} G(Y)$

$\exists!\, \tilde{f} : F(X) \longrightarrow_{\mathcal{D}} Y$

t.q. $f = \eta(X) ; G(\tilde{f})$

$\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
G(F(X)) \arrow[rd, "G(\tilde{f})"] & \\
X \arrow[u, "\eta_X"] \arrow[r, "f"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rd, "\tilde{f}"] & \\
& Y
\end{tikzcd}$$

- η é chamada <u>unidade</u> da adjunção
- $\tilde{f}$ é chamada de <u>transposta</u> da f

—+—

"Produto de A & B em $\mathcal{C}$"

$$A \xleftarrow{\pi_0} A \times B \xrightarrow{\pi_1} B$$

"Funtorializando" o produto

Suponha que $\mathcal{C}$ tenha todos produtos

$\times : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$

$(A, B) \in \mathcal{O} \longmapsto A \times B$

$(f, g) \in \mathcal{A} \longmapsto f \times g : A \times B \longrightarrow A' \times B'$

(A, B)

$\downarrow$

(A', B')

$$A \xleftarrow{\pi_0} A \times B \xrightarrow{\pi_1} B \qquad\qquad A' \xleftarrow{\pi'_0} A' \times B' \xrightarrow{\pi'_1} B'$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_0"'] \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "f \times g = \langle \pi_0 ; f,\ \pi_1 ; g \rangle"] & B \arrow[d, "g"] \\
A' & & B' \\
& A' \times B' \arrow[ul, "\pi'_0"] \arrow[ur, "\pi'_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Tarefa: Provar que é funtor!

Quando tem adj à esquerda?

Buscamos $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tal que $F \dashv X$

Quero provar!

$\exists\, \eta : id(\mathcal{C}) \to F ; X$

$\forall f : A \to B \times C$

$\exists!\, \tilde{f} : F(A) \to (B, C)$ t.q. $f = \eta(A) ; X(\tilde{f})$

- $F(A) = (F_0(A), F_1(A))$

- $\tilde{f} : (F_0(A), F_1(A)) \to (B, C)$

  $\tilde{f}_0 : F_0(A) \to B$

  $\tilde{f}_1 : F_1(A) \to C$

  Então, ...

$\exists \eta : id(\mathcal{C}) \to F;X$

$\forall f : A \to B \times C$

$\exists! \ \tilde{f}_0 : F_0(A) \to B, \ \tilde{f}_1 : F_1(A) \to C$

$f = \eta(A);(\tilde{f}_0 \times \tilde{f}_1)$

quem é F? Não sei... defeito da def. de $\dashv$?

def V3: Dados $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$, dizemos que $F \dashv G$

se

"Em $\mathcal{C}$, a coleção de setas de tipo $X \to G(Y)$"

e

"Em $\mathcal{D}$, a coleção de setas de tipo $F(X) \to Y$"

são isomorfas (como "conjuntos"), naturalmente em X & Y

"O que é" a categoria $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$?

objetos: pares de objetos de $\mathscr{C}$

setas: pares de setas

$$\mathrm{dom}_{\mathscr{C}\times\mathscr{D}}(f,g) = (\mathrm{dom}_{\mathscr{C}}(f), \mathrm{dom}_{\mathscr{D}}(g))$$

$\vdots$