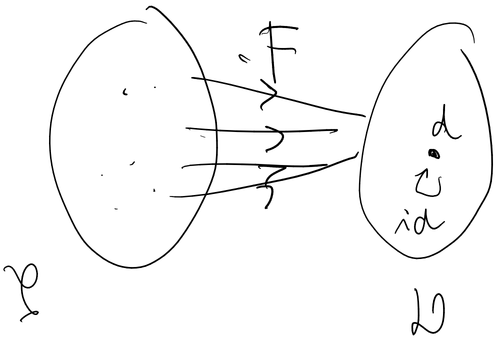
Mais casos particulares de transfs nats.

1) $$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Onde F é um funtor constante:

- $\forall X \in \mathcal{O}(\mathcal{C}) \, (F(X) = d)$
- $\forall f \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) \, (F(f) = id_{\mathcal{D}}(d))$



Como é uma tr. nat. $\eta : F \to G$?

$\eta : O(\mathcal{C}) \to A(\mathcal{D})$ satisfazendo:

1) $\forall X \in O(\mathcal{C}) \left(\eta(X) : \underset{\overset{\shortparallel}{d}}{F(X)} \to G(X) \right)$

2) Naturalidade:

$\forall f \in A(\mathcal{C}) : f : X \to Y$

$$\begin{tikzcd}
F(X)=d \arrow[r, "F(f) = id_{\mathcal{D}}(d)"'] \arrow[d, "\eta(X)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F(Y)=d \arrow[d, "\eta(Y)"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

$\eta(X) ; G(f) = \eta(Y)$

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[dl, "\eta(X)"'] \arrow[dr, "\eta(Y)"] & \\
G(X) \arrow[rr, "G(f)"'] & & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Cones: ápice $\in U(X)$

setas do ápice para os objetos na imagem do diagrama

Na nova linguagem:

G é o diagrama; Funtor constante escolhe o ápice

Uma tr. nat. Const $\longrightarrow G$ fornece as setas do cone.

2) $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ com G constante: co-cones!

3) $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ com F constante d

G constante e

Como são tr. nat. $\eta : F \Rightarrow G$?

$\eta : \mathcal{O}(\mathcal{C}) \to \mathcal{A}(\mathcal{D})$ satisf.:

a) $\forall X \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ $\left(\eta(X) : \underset{\substack{\parallel \\ d}}{F(X)} \to \underset{\substack{\parallel \\ e}}{G(X)} \text{ seta em } \mathcal{D}\right)$

b) $\forall f \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$

$$\begin{tikzcd}
d^{\circ} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\eta(X)"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & {}^{\circ}d \arrow[d, "\eta(Y)"] \\
e^{\circ} \arrow[r, equal] & \overset{\circ}{e}
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \eta(X) = \eta(Y)$

Neste caso, as tr. nats. $F \to G$

$$\equiv$$

setas de $\mathcal{D}$ entre d & e

Em Haskell

Pseudo-Haskell

Uma tr. nat. eta :: [ ] $\longrightarrow$ [ ]

$$\begin{array}{ccccc} \text{eta} : & \mathrm{Ob}(\mathrm{Hask}) & \longrightarrow & A(\mathrm{Hask}) & \text{satisfazendo} \\ & \| & & \| & \\ & \text{Tipos} & & \text{Funções} & \end{array}$$

a) $\forall$ tipo t $\Big($ eta(t) :: [t] $\rightarrow$ [t] $\Big)$

b) Naturalidade :

$\forall f \in \mathcal{A}(Hask) : X \to Y$

$$\begin{tikzcd}
{[X]} \arrow[r, "fmap\ f"] \arrow[d, "eta(X)"'] & {[Y]} \arrow[d, "eta(Y)"] \\
{[X]} \arrow[r, "fmap\ f"'] & {[Y]}
\end{tikzcd}$$

$$(fmap\ f) \circ eta(X) = eta(Y) \circ (fmap\ f)$$

(b) é sempre verdade!

"teoremas de graça": propriedade do sistema de tipos de Haskell

"Tipos Paramétricos"

Da assinatura de uma função com variáveis de tipos, deduzimos um teorema que f satisfaz (Wadler)

Para a assinatura $[t] \to [t]$, o teorema de graça é a naturalidade.

Mais Geral: Para quaisquer funtores F, G : Hask $\to$ Hask, o teorema de graça para eta :: $F(t) \to G(t)$ é a naturalidade!

Em outras palavras, em Haskell toda transformação é natural!

$f : a \to a$; só identidade!

$g : a \to b$: nenhuma!

Dado que "funtores $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$
transfs. nats. entre eles"
formam categoria, temos a definição
"F, G : $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ são isomorfos":

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "\eta"] & G \arrow[l, bend left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

tais que

$$\begin{cases} \eta;\delta = \mathrm{id}(F) & (*) \quad \text{e} \\ \delta;\eta = \mathrm{id}(G) & (**) \end{cases}$$

Lembrete: $\eta;\delta$ é definida por

$$(\eta;\delta)(X) = \eta(X);_{\mathcal{D}}\delta(X)$$

e (*) diz: $\eta(X);_{\mathcal{D}}\delta(X) = id_{\mathcal{D}}(F(X))$

(**) diz: $\delta(X);_{\mathcal{D}}\eta(X) = id_{\mathcal{D}}(G(X))$

Logo, olhando para cada componente,

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, bend left, "\eta(X)"] & G(X) \arrow[l, bend left, "\delta(X)"] \end{tikzcd}$$

com $\eta(X) \,;\, \delta(X) = id_{\mathcal{D}}(F(X))$

$\delta(X) \,;\, \eta(X) = id_{\mathcal{D}}(G(X))$

ou seja : $\eta(X)$ é isomorfismo !

$\delta(X)$ idem

Isomorfismos naturais : transf. nats com isomorfismos nas componentes !

$$\left.\begin{array}{l} F = G \\ F \cong G \\ \exists \eta : F \to G \end{array}\right\}$$ para funtores paralelos (mais forte p/ mais fraco)

Para Categorias

$\mathcal{C} = \mathcal{D}$

$\mathcal{C} \cong \mathcal{D} : \exists F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

$\exists G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$

$F ; G = id(\mathcal{C}) \, , \, G ; F = id(\mathcal{D})$

$\mathcal{C} \equiv \mathcal{D}$ ("equivalentes")

$\exists F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$

$F;G \cong id(\mathcal{C})$, $G;F \cong id(\mathcal{D})$

"F é adjunto à esq. de G", $F \dashv G$,

se

$\exists \eta : F;G \to id(\mathcal{C})$

e $\exists \delta : G;F \to id(\mathcal{D})$

satisfazendo ....?

(próximo assunto!)

Ainda em transfs. nats., usando método da mochila!

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "H"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=F}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=G}] & \mathcal{D} \arrow[r, "K"] & \mathcal{F}
\arrow[Rightarrow, from=F, to=G, "\eta"]
\end{tikzcd}$$

Então :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, shift left, "H;F"] \arrow[r, shift right, "H;G"'] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

Como definir tr. nat. $\delta : H;F \to H;G$?

Para cada $X \in \mathcal{O}(\mathcal{E})$, queremos

$$\delta(X) : (H;F)(X) \longrightarrow (H;G)(X)$$

temos: $\forall Y \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ $\quad \eta(Y) : F(Y) \to G(Y)$

$$H : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$$

$$X \in \mathcal{O}(\mathcal{E}) \mapsto H(X) \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$$

então fazendo $\delta(X) = \eta(H(X))$ temos o tipo certo!

Naturalidade:

Dada $f: X \to X'$ em $\mathcal{C}$

preciso que comute

$$\begin{tikzcd}
F(H(X)) = (H;F)(X) \arrow[r, "(H;F)(f)", "\begin{matrix}\shortparallel \\ F(H(f))\end{matrix}"'] \arrow[d, "\eta(H(X))"'] & (H;F)(X') = F(H(X')) \arrow[d, "\eta(H(X'))"] \\
G(H(X)) = (H;G)(X) \arrow[r, "\begin{matrix}G(H(f)) \\ \shortparallel\end{matrix}", "(H;G)(f)"'] & (H;G)(X') = G(H(X'))
\end{tikzcd}$$

Comuta pois é o caso da naturalidade de η para a seta $H(f) : H(x) \to H(X')$ de φ

Exercício: Encontrar tr. nat.

$$F;K \to G;K$$