$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] \arrow[dd, "h"] & \\
A & & B \\
 & Y \arrow[ul, "\sigma_A"] \arrow[ur, "\sigma_B"'] &
\end{tikzcd}$$

produto

$\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "h"] & \\
A & & B \\
 & X' \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

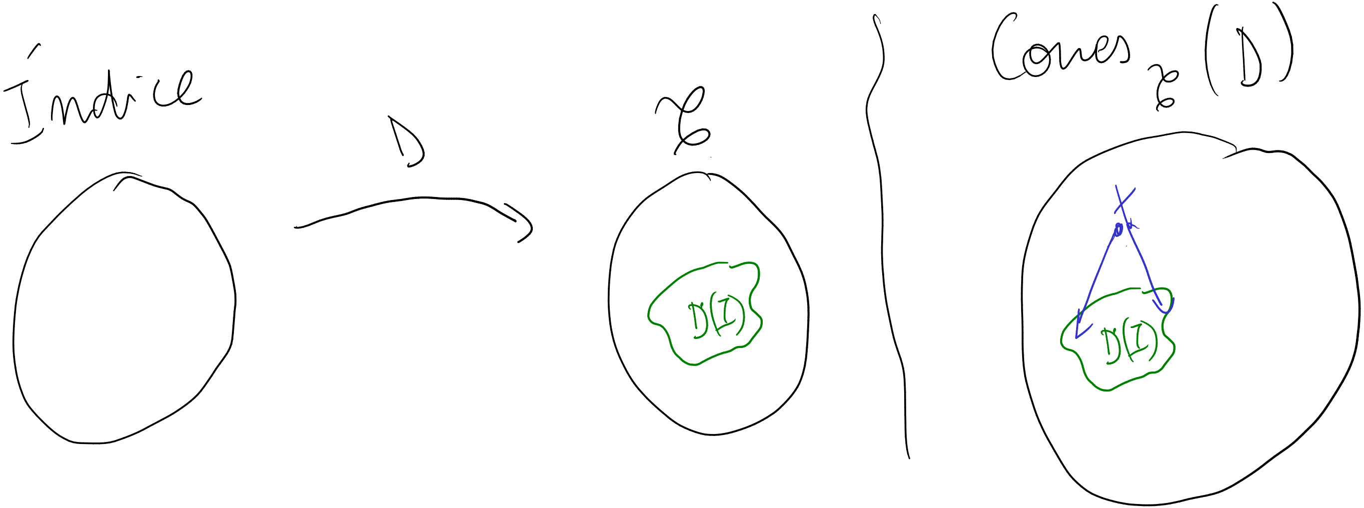
terminal

$\mathrm{Preprod}_{\mathcal{C}}(A,B)$

$$
\begin{tikzcd}
 & t_0 \arrow[loop above, "id"] \arrow[dr, bend left, "!"] \arrow[dl, bend right, "!"'] & \\
t_2 \arrow[ur, "!"] \arrow[rr, bend right, "!"'] & & t_1 \arrow[loop right, "id"] \arrow[ul, "!"'] \arrow[ll, bend left, "!"]
\end{tikzcd}
$$

terminais são únicos a menos de isomorfismo único!

Diagramas y Conos



Índice $\xrightarrow{D}$ $\mathcal{C}$

i

j

$\mathrm{Cones}_{\mathcal{C}}(D) = \mathrm{Prepod}_{\mathcal{C}}(D(i), D(j))$

$$\begin{tikzcd}
 & X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
D(i) & & D(j) \\
 & X' \in (\mathcal{C}) \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

def: Sejam $\underset{\sim}{I}$, $\mathcal{C}$ categorias.

Um $\underset{\sim}{I}$-diagrama em $\mathcal{C}$ é um funtor $\underset{\sim}{I} \to \mathcal{C}$.

def: Dado $\underset{\sim}{I}$, $\mathcal{C}$ e diagrama D, a categoria dos cones para D em $\mathcal{C}$, $\mathrm{Cones}_{\mathcal{C}}(D)$, foi definida na última aula.

def: Sejam I, $\mathcal{C}$, D como acima. Um <u>limite</u> para D é um objeto terminal em $\mathrm{Cones}_{\mathcal{C}}(D)$.

Notação $\lim D$ $\leftarrow$ é o ápice do tal cone

(é sempre único a menos de único isomorfismo!)

Curiosidades

1) índice

$$i \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} j$$

: limites são chamados equalizadores

$$\big\downarrow D$$

$\mathcal{C}$

$$D(i) \overset{D(\alpha)}{\underset{D(\beta)}{\rightrightarrows}} D(j)$$

$\mathrm{Cone}_{\mathcal{C}}(D)$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
D(i) \arrow[rr, shift left, "D(\alpha)"] \arrow[rr, shift right, "D(\beta)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

tais que $f ; D(\alpha) = g$

$f ; D(\beta) = g$

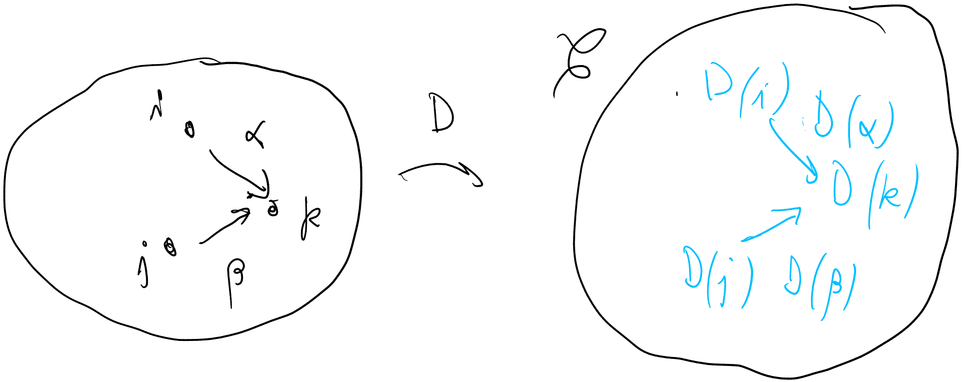
Nesse caso g é "supérfluo": pode ser deduzido de f, $D(\alpha)$, $D(\beta)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & D(i) \arrow[r, bend left, "D(\alpha)"] \arrow[r, bend right, "D(\beta)"'] & D(j) \end{tikzcd}$$

Cone terminal (igualizador) é

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & D(i) \arrow[r, shift left, "D(\alpha)"] \arrow[r, shift right, "D(\beta)"'] & D(j) \\ \forall F \arrow[u, dashed, "!"] \arrow[ur, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

2) índice



Cone para D:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, bend right, "h"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & D(i) \arrow[dr, "D(\alpha)"] & \\
D(j) \arrow[rr, "D(\beta)"'] & & D(k)
\end{tikzcd}$$

tal que

$$f ; D(\alpha) = g$$

$$h ; D(\beta) = g$$

g é supérfluo! Basta saber f, $D(\alpha)$

e/ou h, $D(\beta)$

Neste caso é usual considerar

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & D(i) \arrow[d, "D(\alpha)"] \\ D(j) \arrow[r, "D(\beta)"'] & D(k) \end{tikzcd}$$

Um cone terminal é...

$$
\begin{tikzcd}
\forall Q \arrow[drr, bend left, "f'"] \arrow[ddr, bend right, "h'"'] \arrow[dr, "!"] & & \\
& P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & D(i) \arrow[d, "D(\alpha)"] \\
& D(j) \arrow[r, "D(\beta)"'] & D(k)
\end{tikzcd}
$$

"pullback"

ou

"produto fibrado"

__def__: Uma categoria é chamada __completa__ se qualquer diagrama para ela tem limite.

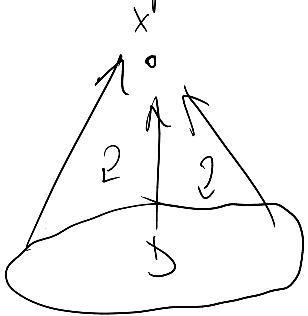
"Finitamente pequena" quando tem o limite de qualquer diagrama vindo de um índice finito

Teorema: (1) Uma categoria é finitamente completa sse possui equalizadores e possui todos os produtos finitos

sse possui terminal
possui pullbacks

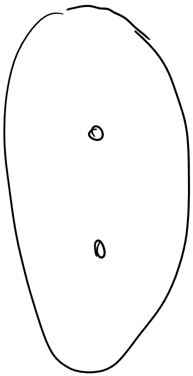
(2) Uma categoria é completa sse possui equalizadores e possui todos os produtos.

Tudo que falamos sobre cones pode ser "dualizado":



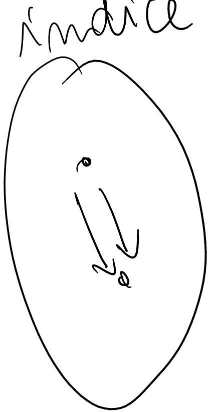
- Cocones (ou "cones duais)
- categoria de Cocones(D)
- colimites: cocones iniciais

índice



Colimites:

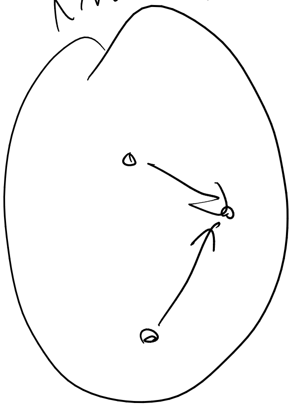
Coproduto!



Colimite:

Coequalizador

indice



Colimite

"copullback"

ou

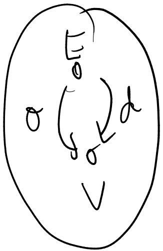
"pushout"

_____ × _____

Lembrete da Lista 1:

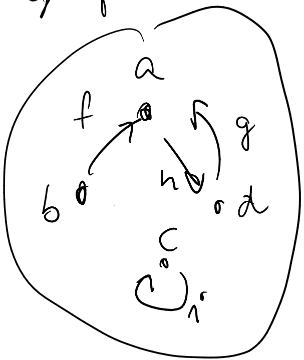
Grafos (gerais)

~



$\xrightarrow{G}$ Set

grafo



quem é o funtor?

$G(V) = \{a, b, c, d\}$

$G(E) = \{f, g, h, i\}$

É o homomorfismo de grafos?

Lembrete: dados

$G = (G(V), G(E), G(o), G(d))$

$H = (H(V), H(E), H(o), H(d))$

um homomorfismo $\varphi : G \to H$ é composto de um par de

$G(o) : G(E) \to G(V)$

$f \mapsto b$

$g \mapsto d$

$h \mapsto a$

$k \mapsto c$

$G(d) : G(E) \to G(V)$

$f \mapsto a$

$g \mapsto a$

$h \mapsto d$

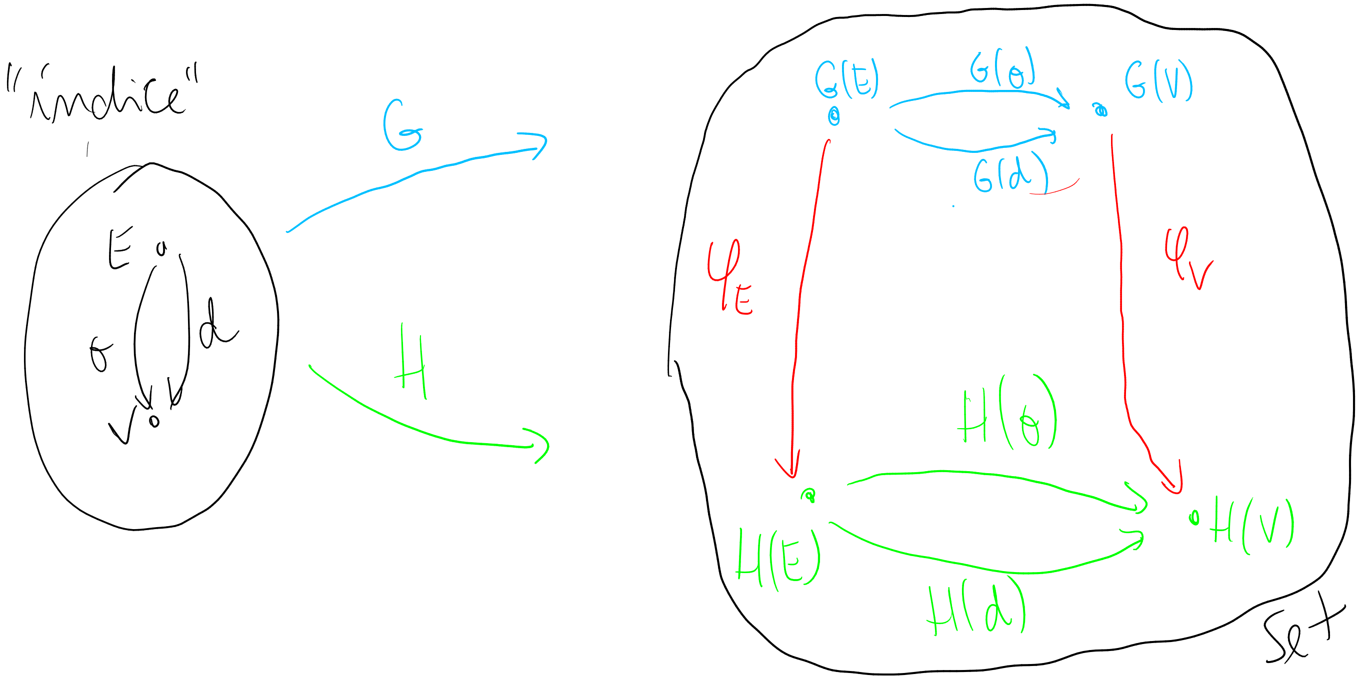
$k \mapsto c$

funções $\varphi_V : G(V) \to H(V)$

$\varphi_E : G(E) \to H(E)$

satisfazendo "preservação de estrutura"

$$\left.\begin{array}{l} - \forall e \in G(E) : \varphi_V\big(G(o)(e)\big) = H(o)\big(\varphi_E(e)\big) \\ - \forall e \in G(E) : \varphi_V\big(G(d)(e)\big) = H(d)\big(\varphi_E(e)\big) \end{array}\right\} \star$$


"indice"
E
o
d
V
G
H
G(E)
G(o)
G(V)
G(d)
φ_E
φ_V
H(o)
H(E)
H(d)
H(V)
Set

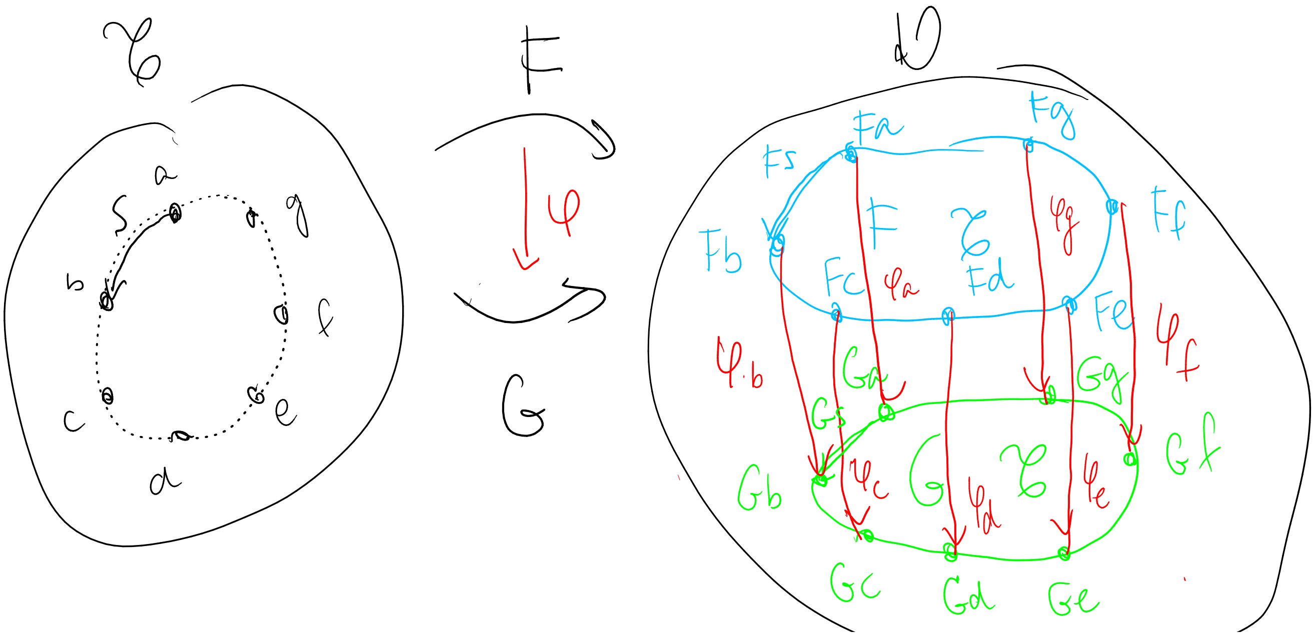
As propriedades (*) podem ser expressas mencionando a figura:

"a face 'vertical' convexa do cilindro comuta"

e

"a face 'vertical' côncava do cilindro comuta"

Investigando o caso geral



$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "Fs"] \arrow[d, "\varphi_a"'] \arrow[dr, phantom, "\mathcal{D}"] & Fb \arrow[d, "\varphi_b"] \\
Ga \arrow[r, "Gs"'] & Gb
\end{tikzcd}$$

para cada objeto x
da cat. índice,
uma seta em $\mathcal{D}$
$\varphi_x : F(x) \to G(x)$

Dados

tais que

Para cada seta $s : x \to y$ de $\mathcal{C}$, temos

$$\begin{tikzcd}
Fx \arrow[r, "Fs"] \arrow[d, "\varphi_x"'] & Fy \arrow[d, "\varphi_y"] \\
Gx \arrow[r, "Gs"'] & Gy
\end{tikzcd}$$

transformação natural de F p/ G!