$$A \xleftarrow{\pi_0} X \xrightarrow{\pi_1} B \qquad X \cong X' \qquad \mathcal{C}$$

$$A \xleftarrow{\pi'_0} X' \xrightarrow{\pi'_1} B$$

$$\langle \pi_0, \pi_1 \rangle ; \langle \pi'_0, \pi'_1 \rangle = id_X$$

"produtos de um mesmo par de objetos são únicos a menos de único isomorfismo"

$$\mathbb{R} \xleftarrow{\pi_0} \mathbb{R} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{N}$$

$$\mathbb{R} \xleftarrow{\pi'_0} (\mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \{oi\}) \xrightarrow{\pi'_1} \mathbb{N}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \times \mathbb{N} \arrow[dl, "\pi_0"'] \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[dd, bend right, "\langle \pi_0, \pi_1 \rangle"'] & \\
\mathbb{R} & & \mathbb{N} \\
 & \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \{oi\} \arrow[ul, "\pi'_0"] \arrow[ur, "\pi'_1"'] \arrow[uu, bend right, "\langle \pi'_0, \pi'_1 \rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

isomorfismos em Set

são as

bijeções

Dados A, B objetos em $\mathscr{C}$, a categoria $PreProd(A,B)$ tem como

objetos: (X, f, g) com $X \in \mathcal{O}(\mathscr{C})$

$f, g \in A(\mathscr{C})$

$dom_{\mathscr{C}}(f) = dom_{\mathscr{C}}(g) = X$

$cod_{\mathscr{C}}(f) = A$

$cod_{\mathscr{C}}(g) = B$

Setas:

$h: (X, f, g) \longrightarrow (X', f', g')$ em $PreProd(A,B)$

sse

$h: X \to X' \in A(\mathscr{C})$ satisfazendo

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "h"] & \\
A & & B \\
 & X' \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

em $\mathscr{C}$

"(X, f, g) é produto de A e B em $\mathscr{C}$"

se traduz em

"todo objeto de $\mathrm{PreProd}(A, B)$ aponta para (X, f, g) com uma única set" (☆)

em $PreProd(A,B)$, se (X,f,g) e (X',f',g') ambos satisfazem $(\star)$

$$\begin{tikzcd}
(X,f,g) \arrow[loop left, "\star\ id"] \arrow[r, bend left, "\star\ !h"] & (X',f',g') \arrow[l, bend left, "\star\ !h'"] \arrow[loop right, "\star\ id"]
\end{tikzcd}$$

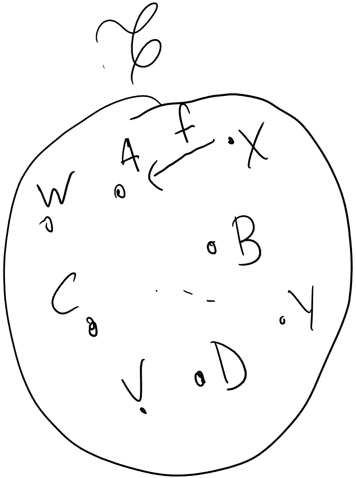
Logo $h;h' = id_{esq}$ & $h';h = id_{dir}$ $\therefore$

na categoria PreProd

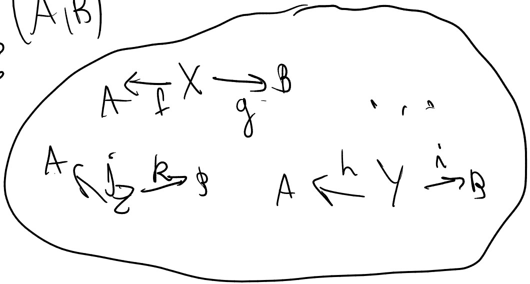
$$(X,f,g) \cong (X',f',g')$$

Em PrProd(A,B), h é o <u>único</u> isomorfismo de (X,f,g) para (X',f',g')

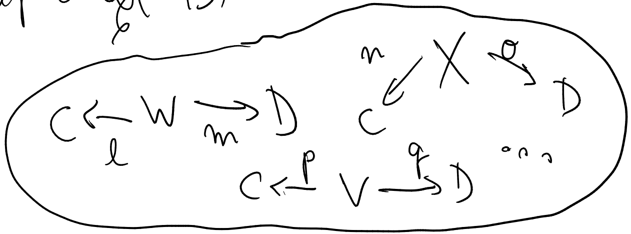
Tarefa: Completar a definição & mostrar que é categoria

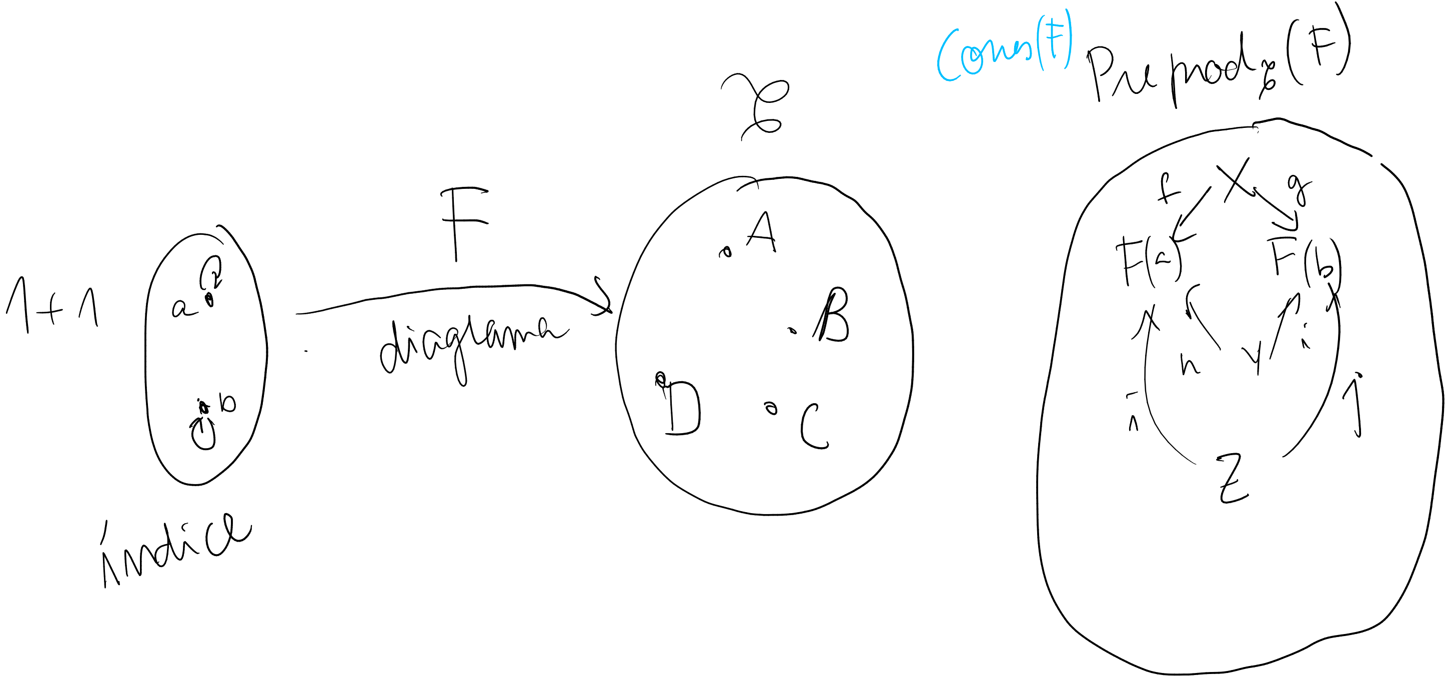


$\mathrm{Preprod}_{\mathcal{C}}(A,B)$



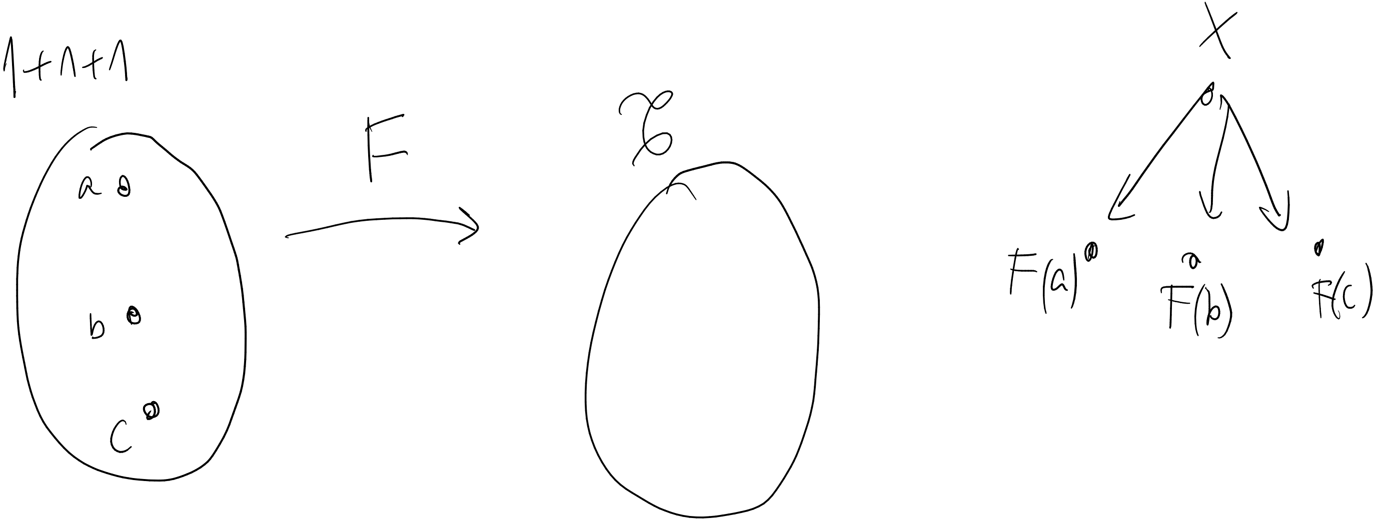
$\mathrm{Preprod}_{\mathcal{C}}(C,D)$

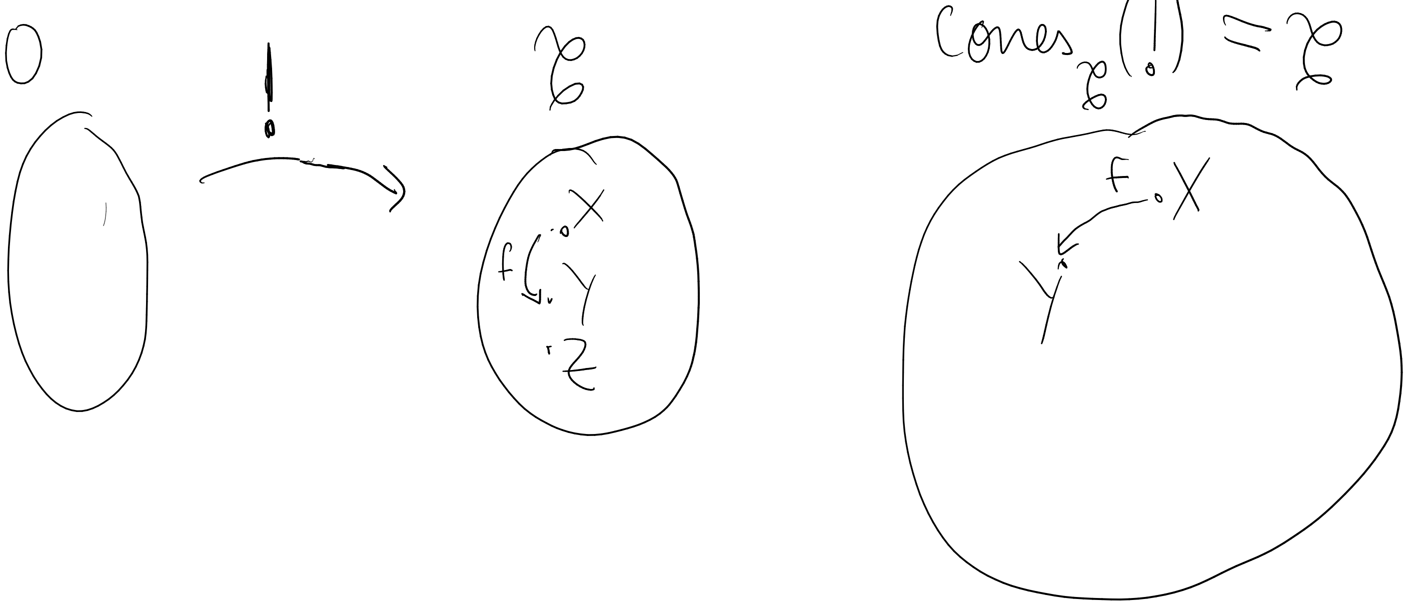



1+1
a
b
índice
F
diagrama
A
B
C
D
Cone(F)
X
f
g
F(a)
F(b)
Z

Setan

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "h"] \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "g" near end] & & X' \arrow[dll, "f'"' near end] \arrow[d, "g'"] \\
F(a) & & F(b)
\end{tikzcd}$$


1+1+1
a
b
c
F
𝒞
X
F(a)
F(b)
F(c)

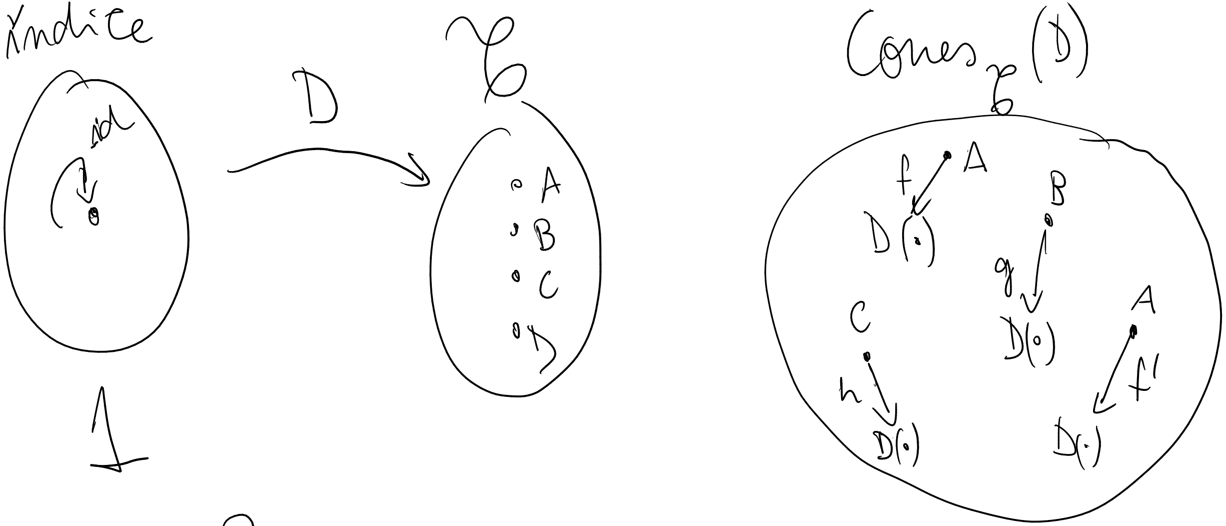


0
$!$
$\mathcal{C}$
X
f
Y
Z
$\mathrm{Cones}_{\mathcal{C}}(!) = \mathcal{C}$
f
X
Y

def: Um objeto terminal em uma categoria $\mathscr{C}$ é um objeto X tal que qualquer objeto de $\mathscr{C}$ aponta para ele com uma única seta. 1

Ex: Na categoria Set, qualquer conjunto unitário é terminal!

- Em uma categoria vinda de um poset, um terminal é um "topo" da ordem (elemento "acima" de todos)



$$\begin{tikzcd} & D(\cdot) \arrow[d, "id"] \\ A \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[r, "f"'] & D(\cdot) \end{tikzcd}$$

? quem é o "cone especial"?

produto unário!

Setas:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[dl, "g"] \\
& D(\cdot) &
\end{tikzcd}$$

Essa categoria $\mathrm{Cones}_{\mathcal{C}}(D)$ tem nome "categoria das fatias sobre $D(\cdot)$", denotada

$\mathcal{C}/D(\cdot)$ "categoria sobre"

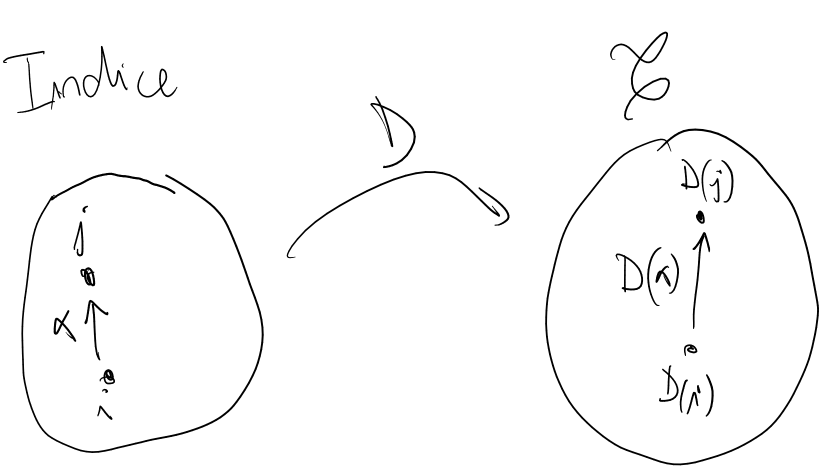
<u>Exemplo</u>: Na categoria Hask temos o objeto $Bool = \{False, True\}$

Hask/Bool os objetos são "problemas de decisão"

$$a \xrightarrow{f} Bool$$

setas são

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & Bool \\
b \arrow[u, bend left, "h"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$



$X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(\alpha)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}$$