$$\mathrm{TC} \rightleftarrows \mathrm{PF}$$

Hoje: 1 Construções Livres

2 Isomorfismos

1) a) Coproduto de monoides

b) Monoide Livre $(\{e\}, *, e)$

c) Monoide Livre contendo

a, b

palavras usando $\{a, b\}$!

e

aa bb

a b

ab ba

$(aa)b = a(ab)$

Listas!

d) Magma Livre

$(\emptyset, op)$

e) Magma Livre contendo a

1 universo

1 op binário

a

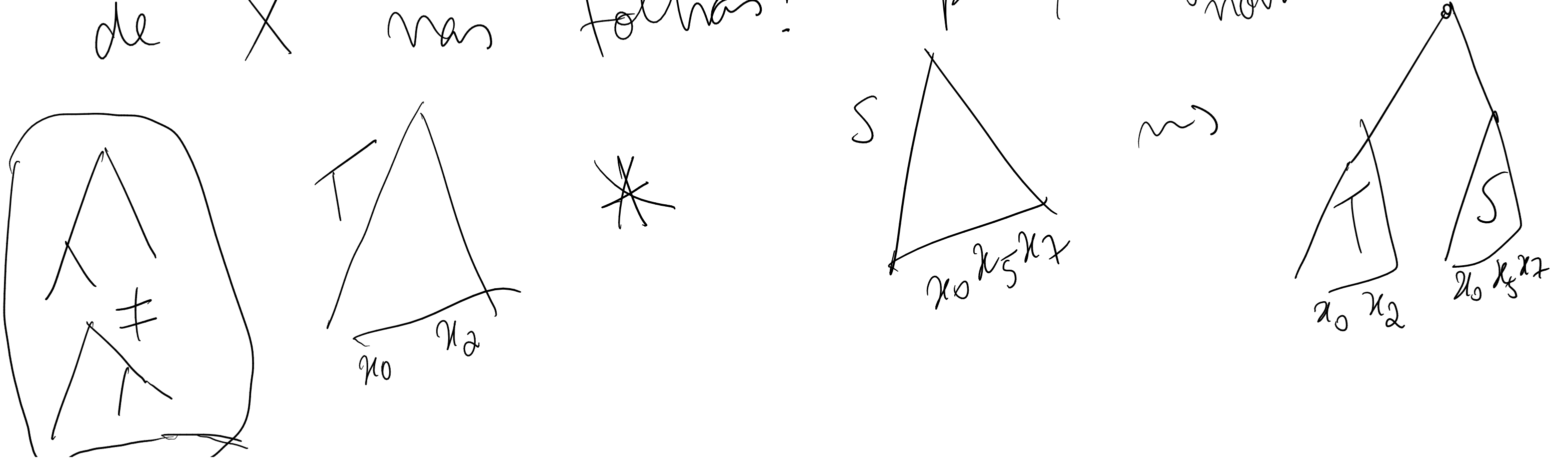
aa

$a(aa)$ $(aa)a$

$\vdots$

f) Magma livre contendo $X = \{x_0, x_1, \dots\}$

árvores binárias (não vazias) com elementos de X nas folhas! operação "juntar sob uma nova raiz"



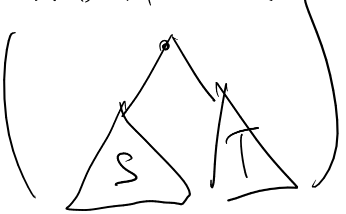
Para a construção acima virar funtor,
falta transformar função $f: X \to Y$
em um homomorfismo MagmaLivre(f):
MagmaLivre$(X) \to$
MagmaLivre(Y)

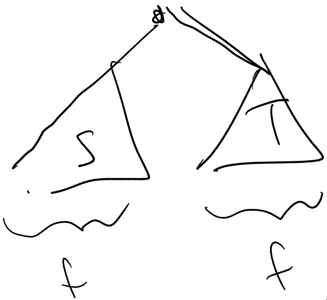
Ideia: "operar em cada folha"

Prova de que é homo:

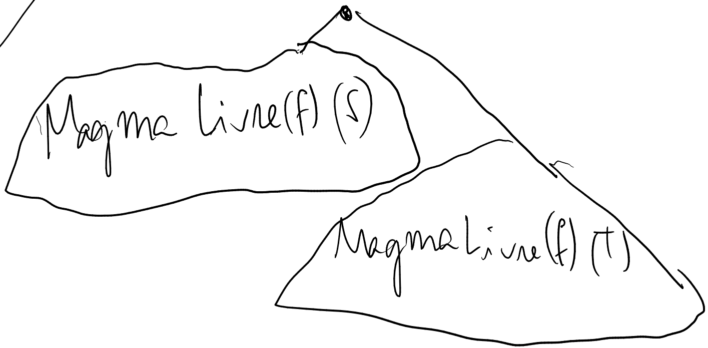
Temos S, T em Magma Livre (X)

1ª opção: juntar antes, levar depois

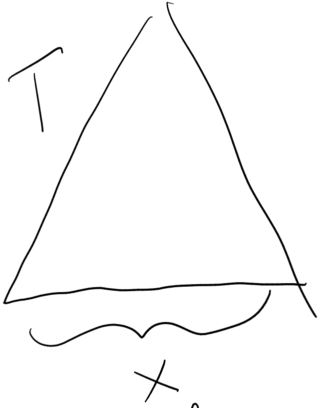
Magma Livre (f) 

= 

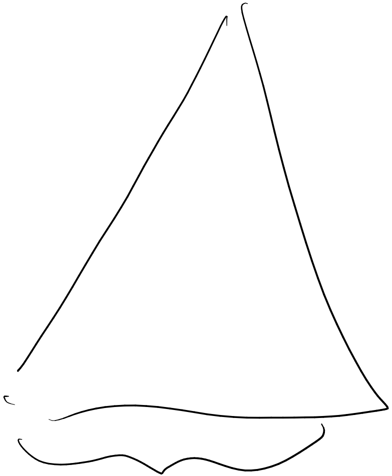
2ª opção: levar antes, juntar depois



$X \xrightarrow{f} Y$



Mochila



f's de X

Para mostrar que Magma Livre é funtor,
falta mostrar propriedades:

1) Preserva dom, cod: por construção ✓

2) Preserva id ✓

3) Preserva composta ✓

g) assinatura

1 universo

1 constante c

1 operação unária op

$op(d)$

d $op(op(d))$

$op(op(od(d)))$

naturais!

h) assinatura

Constantes $c_0, c_1, \ldots$

1 op unária N

4 ops binárias C, D, I, B

$e_0, e_1, e_2 \ldots$

"fechar para" N, C, D, I, B

Fórmulas da lógica proposicional!

"leitura única"

ISOMORFISMOS

def: Objetos A & B são isomorfos quando há uma seta $f: A \to B$, chamada isomorfismo tal que:

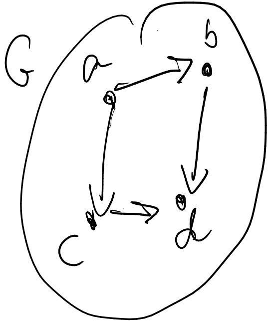
$\exists\, g: B \to A$ $\left(\begin{array}{l} f \circ g = id_A \\ g \circ f = id_B \end{array} \right)$

Esta definição "compete" com noções já bem estabelecidas de isomorfismo:

a) Dados grafos simples direcionados

$G = (V_G, A_G)$

$H = (V_H, A_H)$



Em Mat. Disc., um isomorfismo de

grafos é uma "renotulação": uma troca
de nomes dos vértices
que não altere as respostas
"há aresta entre _ & _ ?"

Categoricamente:

1) Qual a categoria em questão?

objetos: grafos simples direcionados

setas (homomorfismos): funções entre os conjs. de vértices

- assinatura 1 universo
  1 rel. bin

que preservam os SIM

- \+ axioma "simples"

2) Isomorfismo (categ.) aqui quer dizer:

há homom. $f : (V_G, A_G) \to (V_H, A_H)$

há " $g : (V_H, A_H) \to (V_G, A_G)$

tais que $f;g = id_G$ & $g;f = id_H$

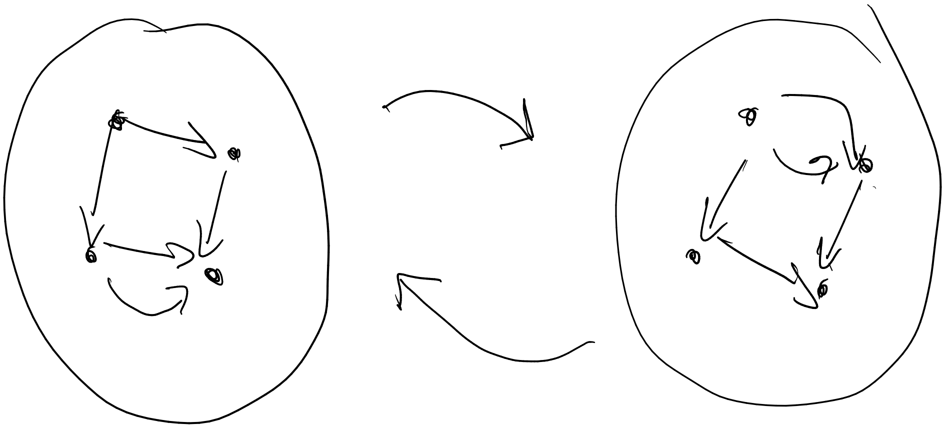
Note que portanto f preserva SIM de G p/ H

g preserva SIM de H p/ G.

As compostas $f \circ g = id$ & $g \circ f = id$ implicam que f & g são f(s) inversas, portanto bijeções

Assim, a preservação de SIM de g de H p/ G

$\Leftrightarrow$ é (por contrapositiva) a preservação de NÃO de f de G p/ H!



Nada a ver com essa matéria!!

- Como vimos:

se temos que $A \xleftarrow{\pi_0} X \xrightarrow{\pi_1} B$

& $A \xleftarrow{\pi'_0} X' \xrightarrow{\pi'_1} B$

são produtos de A & B, então

X, X' são isomorfos

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\pi_0"'] \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[dd, dashed, bend left, "{\langle \pi_0, \pi_1 \rangle}"] & \\
A & & B \\
 & X \arrow[ul, "\pi'_0"] \arrow[ur, "\pi'_1"'] \arrow[uu, dashed, bend left, "{\langle \pi'_0, \pi'_1 \rangle}"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\pi_0"'] \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[dd, "{\langle \pi_0, \pi_1 \rangle ; \langle \pi'_0, \pi'_1 \rangle}"] & \\
A & & B \\
 & X \arrow[ul, "\pi_0"] \arrow[ur, "\pi_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \langle \pi_0, \pi_1 \rangle ; \langle \pi'_0, \pi'_1 \rangle = id_X \\ \langle \pi'_0, \pi'_1 \rangle ; \langle \pi_0, \pi_1 \rangle \leq id_{X'} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{X \cong X'}
$$

"Produtos de um mesmo par de objetos são únicos a menos de um único isomorfismo" É FALSA

Como corrigí-la? Há um cheiro de frase verdadeira no ar ...