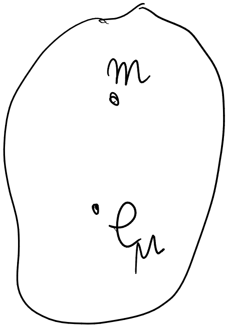
Monoide coproduto



$m *_P n$

$m *_P m *_P n$

$m * (n * n')$

$(m *_P n) *_P n'$

$n' *_P m *_P n$

$\mathcal{M} = (M, *_M, e_M)$

$\mathcal{N} = (N, *_N, e_N)$

Quociente pela relação de equivalência

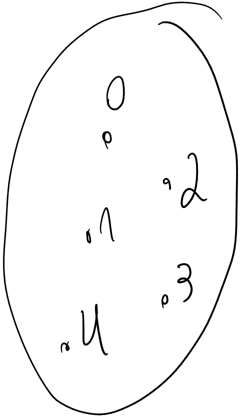
$$expr_1 \equiv expr_2$$

quando consigo chegar de expr 1 em expr 2 apenas...

1) trocando parênteses (associatividade)

2) trocando elementos consecutivos de um mesmo monoide em uma das expressões

pelo resultado da conta no monoide correspondente.



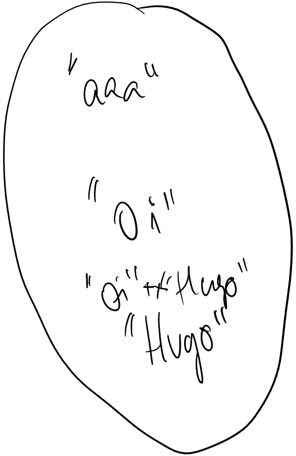
$(\mathbb{N}, +, 0)$

$2 * \text{"Oi"}$

$(2 * \text{"Oi"}) * \text{"Hugo"}$

quero $=$ $2 * (\text{"Oi"} +\!\!+ \text{"Hugo"})$

quero $=$ $2 * \text{"OiHugo"}$



$(\text{Strings}, +\!\!+, \text{""})$

$$W_0 = (m_0 * n_0 * m_1 * n_1 * \cdots * n_k)$$

$$*$$

$$W_1 = (n'_0 * m'_0 * m'_1 * \cdots)$$

$W_0 \quad W_1$

Monoide coproduto !! $(M, *_M, e_M)$ $(N, *_N, e_N)$

- Universo: palavras finitas no alfabeto
  união disjunta
  $(M \uplus N)$ que tenham letras alternadas
  exceto os neutros
- Operação: concatenação seguida de
  "contração" de letras consecutivas do mesmo monoide
  e apagamento dos neutros
- neutro: palavra vazia

$M \xrightarrow[i_M]{} \text{Coproduto}$

$m \longmapsto \langle m \rangle$ (ou $\langle\ \rangle$ se m for e_M)

- Provar que é homomorfismo

$$\begin{array}{ccccc} m & *_M & m' & \longmapsto & \langle m *_M m' \rangle \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \langle m \rangle & & \langle m' \rangle & & \end{array}$$

$e_M \longmapsto \langle\ \rangle$

$$
\begin{tikzcd}
 & C & \\
M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "i_M"'] & & N \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "i_N"] \\
 & P \arrow[uu, dashed, "\exists!\, h"'] &
\end{tikzcd}
$$

Quem é h?

$h: \mathrm{Coprod} \longrightarrow C$

$\langle\,\rangle \longmapsto e_C$

$\langle m_0, n_0, m_1, n_1, \ldots \rangle \longmapsto f(m_0) *_C g(n_0) *_C f(m_1) *_C \ldots$

- É homomorfismo! (Verifique) $\exists$
- Unicidade do h

Seja $k: \mathrm{Coprod} \longrightarrow C$ tal que

$$\begin{cases} \sin ; k = f \\ \sin ; k = g \end{cases}$$

Seja $w = \langle n_0, n_0, n_1, n_1, \ldots \rangle$ em Coprod

Tarefa: Mostrar $h(w) = k(w)$

Mas $\quad w = \langle m_0 \rangle * \langle n_0 \rangle * \langle m_1 \rangle * \langle m_1 \rangle \cdots$

$$= i_m(m_0) * i_n(n_0) * i_m(m_1) * \cdots$$

$$k(w) = k\big(i_m(m_0) * i_n(n_0) * i_m(m_1) * \cdots\big)$$

$$\overset{k\text{ homo!}}{=} k(i_m(m_0)) *_c k(i_n(n_0)) *_c \cdots$$

$$= (i_m ; k)(m_0) *_e (i_n ; k)(n_0) *_c$$

$$\overset{\text{nip } k}{=} f(m_0) *_c g(n_0) *_c f(m_1) *_c \cdots$$

$$= h(w)$$

$$x *_P y = z \xrightarrow{\quad h \quad} h(x) *_C h(y) = h(z)$$

P $\qquad\qquad\qquad\qquad$ C

Repare:

1) Suponha que numa categoria $\mathscr{C}$ tenhamos que o produto de A & B seja $A \xleftarrow{\pi_A} X \xrightarrow{\pi_B} B$

(Lembrando:

$$
\begin{tikzcd}
& \forall C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, dashed, "!h"] & \\
A \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & B \\
& X \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] \arrow[dd, dashed, "!h"] & \\
A \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & B \\
& X \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] &
\end{tikzcd}
$$

$h = id_X$

2) Agora suponha que além de

$$A \xleftarrow{\pi_A} X \xrightarrow{\pi_B} B$$

tenhamos também

$$A \xleftarrow{\pi'_A} X' \xrightarrow{\pi'_B} B \text{ produto}$$

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[dl, "\pi'_A"'] \arrow[dr, "\pi'_B"] \arrow[dd, dashed, "!h"] & \\
A & & B \\
 & X \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] \arrow[dd, dashed, "!h'"] & \\
A & & B \\
 & X' \arrow[ul, "\pi'_A"] \arrow[ur, "\pi'_B"'] &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[dl, "\pi'_A"'] \arrow[dr, "\pi'_B"] \arrow[dd, bend left, "h"] & \\
A \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & B \\
 & X \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] \arrow[uu, bend left, "h'"] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] \arrow[d, "h';h"] & \\
A & X' \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

$h';h = id_X$!

&

$h;h' = id_{X'}$!

def: Sejam A & B objetos em uma categoria $\mathcal{C}$.
Dizemos que uma seta $f: A \to B$ entre A & B é um isomorfismo quando $\exists\, g: B \to A$ (chamada inversa de f) satisfazendo

$$\begin{cases} f \circ g = id_A \\ g \circ f = id_B \end{cases}$$

Conclusão: no "espaço" (2), temos que

X & X' são isomorfo !

O mesmo argumento valeria para

coproduto

É usual em matemática, computação, categorias trabalharmos "a menos de isomorfismo": tratar como <u>iguais</u> coisas que são apenas isomorfas.

Assim, podemos dizer: "o (objeto do) produto de dois objetos em uma categoria é único (a menos de iso)" e denotar o (objeto do) produto de A & B por $A \times B$

O coproduto é denotado $A + B$.