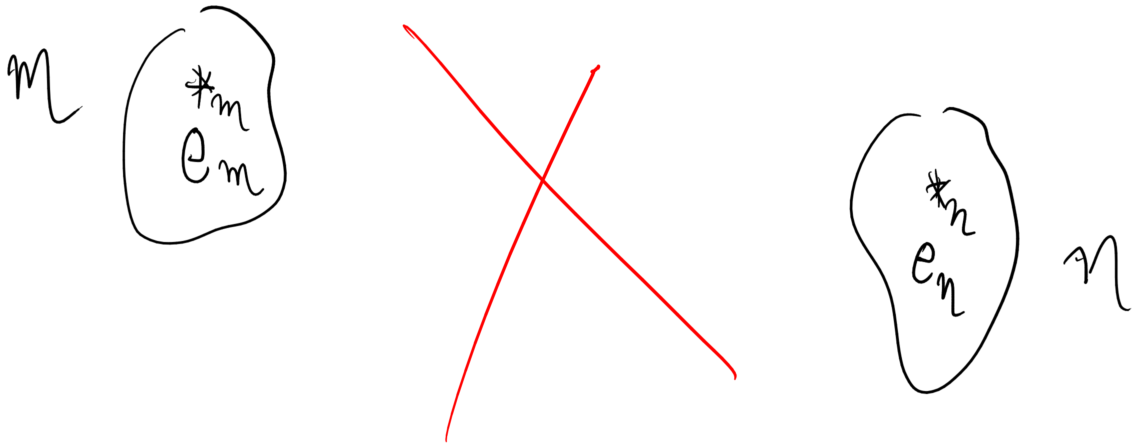
97) Produto

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, dashed, "!\langle f,g\rangle"] & \\
A & & B \\
& X \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Coproduto

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "i_A"'] & & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "i_B"] \\
& X \arrow[uu, dashed, "!{[f,g]}"] &
\end{tikzcd}$$


$\mathcal{M}$
$*_m$
e_m
$*_n$
e_n
$\mathcal{N}$

$$M + N = (M \times N, *, (e_M, e_N))$$

$$(m, n) * (m', n') = (m *_M m', n *_N n')$$

$$M \xrightarrow{i_M} M + N$$

$$m \longmapsto (m, e_N)$$

Não funciona!

Mas funcionaria em monoides comutativos

$$
\begin{tikzcd}
 & P=(P,*_P,e_P) & \\
m \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "i_m"'] & & n \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "i_n"] \\
 & m+n \arrow[uu, dashed, "!h"] &
\end{tikzcd}
$$

tarefa

Proposta de

$h : m+n \to P$

$(m,n) \mapsto e_P$

é homo

mas não

comuta!

$$(m, n) \longmapsto f(m) *_P g(n)$$

- Comutatividade do diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} m & \overset{i_M}{\longmapsto} & (m, e_N) & \overset{h}{\longmapsto} & f(m) *_P g(e_N) \\ \Uparrow & & & & \ \shortparallel \\ M & & & & \ e_P \end{array}$$

$$= f(m)$$

Unicidade de h p/ comutatividade:

se k é tal que $\begin{cases} i_m ; k = f \\ i_n ; k = g \end{cases}$

$$k(m,n) = k\big((m, e_N) * (e_M, n)\big)$$

$$= k(m, e_N) *_P k(e_M, n)$$

$$= k(i_n(m)) *_p k(i_n(n))$$

$$= f(m) *_p g(n)$$

$$= h(m, n)$$

Mas h não é homomorfismo $\ddot{\frown}$

- $h(e_M, e_N) = f(e_M) *_p g(e_N) = e_p *_p e_p = e_p$

$$\bullet \; h\big((m,n) * (m',n')\big) = h(m,n) *_P h(m',n')$$

precise motivation

$$\text{Esq} = h\big((m *_M m',\; n *_N n')\big)$$

$$= f(m *_M m') *_P g(n *_N n')$$

$$= f(m) *_P f(m') *_P g(n) *_P g(n')$$

$$\mathrm{Din} = f(m) *_p g(n) *_p f(m') *_p g(n')$$

$f\ x = h\ (\text{Esq}\ x)$

$$\begin{tikzcd}
& \text{Bool} & \\
x \quad \text{String} \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\text{Esq}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \text{Integer} \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "\text{Dir}"] \\
& \text{Coprod String Integer} \arrow[uu, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

$\text{Esq}\ x$

Unicidade de h:

$\forall k$: Coprod String Integer $\to$ Bool

tq $\begin{cases} \text{Esq} ; k = f \\ \text{Dir} ; k = g \end{cases}$ (★)

temos $h = k$

Seja k satisfazendo (★)

Quero: $h = k$ ou seja

$\forall c \in \text{Coprod String Integer } (h\,c = k\,c)$

Seja $c \in$ ↗

Caso 1: $C = \text{Esq } s$ para $s \in$ String

Neste caso $h\,c = f\,s$ (def)

e $k\,c = k\,(\text{Esq } s)$

$$= (Esq \,;\, k)\; s$$

$$\underset{k}{\overset{\text{hipótese}}{=}}\; f\; s$$

$$= h\,c \quad //$$

<u>caso 2</u> $c = \mathrm{Dir}\ i$ para $i \in \mathrm{Int}\ \mu$

análogo!

$$
\begin{tikzcd}
 & b & \\
\{\bullet\} \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{Nothing}"'] & & \bullet\ a \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "\mathrm{Just}"] \\
 & \mathrm{Maybe}\ a \arrow[uu, dashed, "!h"] &
\end{tikzcd}
$$

Investigação sobre coproduto de monoide (sem assumir comutatividade)

$\mathcal{M} = (M, *_M, e_M)$ $\qquad$ $\mathcal{N} = (N, *_N, e_N)$

$M \ni m \qquad e \qquad N \ni n$

$m * n$

m

$m' * m = m''$

$x = (m * n) * m'$ quociente $\rightsquigarrow$ $=$

$m * (n * m')$

$x * m = m * n * m' * m$

$= m * n * m''$

Geração Livre

quro: e neutro