Sumário

Sintaxe da Lógica dos Conectivos

Petrucio Viana & Renata de Freitas

GAN–IME–UFF

21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Sintaxe da Lógica dos Conectivos: fórmulas

Descrição de um sistema lógico para sentenças e conectivos

Vamos, agora, descrever LC como um sistema lógico para o tratamento de sentenças e conectivos, levando em conta as características das sentenças já apontadas (e outras que ainda vão surgir).

Como para qualquer sistema lógico, a descrição da LC é feita pela apresentação de

uma linguagem formal na qual as sentenças vão ser "traduzidas"

e (um pouco depois)

um mecanismo de inferência com o qual novas sentenças são produzidas, a partir de sentenças dadas.

Sintaxe e semântica

A descrição de uma linguagem formal é feita, em geral, em duas etapas:

1. Sintaxe: qual o alfabeto da linguagem e como as palavras, frases e textos da linguagem são formados.
2. Semântica: que significados podem ser atribuídos à letras do alfabeto, as palavras, frases e textos da linguagem.

Vamos, agora, definir a sintaxe da LC.

Depois, vamos definir a semântica da LC.

Alfabetos

Do ponto de vista formal, um alfabeto é um conjunto não vazio de *símbolos*.

Por exemplo:

(a) O alfabeto de língua portuguesa.

(b) O alfabeto de língua portuguesa acrescido de todos os símbolos usados em Matemática.

(c) O alfabeto unário, $A = \{1\}$

(d) O alfabeto binário, $B = \{0, 1\}$

Alfabeto da LC

O alfabeto da LC possui símbolos de três categorias sintáticas:

Definição: O **alfabeto** da LC consiste dos seguintes símbolos:

(1) *Símbolos para sentenças*: p , q , r , (indexadas ou não).

(2) *Símbolos para os conectivos lógicos*: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

(3) *Sinais de pontuação*: (,)

O conjunto dos símbolos para sentenças é denotado por SS e pode ser finito ou infinito, dependendo da situação.

Alfabeto da LC

Assumimos que:

1. Os símbolos do alfabeto são distintos dois a dois.

2. Nenhum símbolo é uma sequência de outros símbolos.

Isto ajuda a garantir a legibilidade única das palavras da linguagem (sem a qual as “máquinas” que processam a informação ficariam “confusas”).

Significado intuitivo

Símbolos para sentenças: sentenças (atômicas) da Língua Portuguesa ou da Linguagem Matemática.

Conectivo	*nome*	*significado*
$\neg$	símbolo de negação	não é o caso que
$\wedge$	símbolo de conjunção	e (ao mesmo tempo)
$\vee$	símbolo de disjunção	ou (inclusivo)
$\rightarrow$	símbolo de implicação	se...então
$\leftrightarrow$	símbolo de biimplicação	se, e somente se

Palavras

Do ponto de vista formal, os símbolos do alfabeto são usados para escrevermos as palavras da linguagem.

Definição. Seja A um alfabeto.
Uma **palavra sobre** A é uma sequência finita de símbolos de A.

A palavra cujos símbolos são s_1, s_2, s_3, ..., s_n, nesta ordem, é denotada por $s_1 s_2 s_3 \ldots s_n$.

Por exemplo, se $A = \{a, b\}$, as seguintes são palavras sobre A: a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, ...

Palavras da LC

Assim, uma palavra da LC é uma sequência finita qualquer de símbolos do alfabeto da LC.

Como a definição é muito geral (qualquer sequência finita é uma palavra), algumas palavras fazem sentido (intuitivamente) e outras não.

$$p_1 q_1 r_1 \neg \wedge ()(()) \quad , \quad (p_1(p_1 \rightarrow p_2)p_2)$$

$$\neg\neg p_1 \leftrightarrow p_1 \quad , \quad ((p_1 \wedge (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow p_2)$$

Objetivo sintático principal

Apresentar uma definição que seleciona, de uma maneira puramente sintática (isto é, sem fazer referências aos significados intuitivos dos símbolos), dentre todas as palavras possíveis de serem formadas com os símbolos do alfabeto da LC, aquelas que consideraremos como fazendo sentido.

Em lógica, as palavras que fazem sentido são, usualmente, chamadas de fórmulas.

Fórmulas também são chamadas de formas ou expressões bem formadas.

Fórmulas da LC

Definição. As **fórmulas** da LC são obtidas por aplicação das seguintes regras:

1. Cada símbolo para sentenças é uma fórmula.
2. Se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula.
3. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ são fórmulas.

Assumimos que nenhum objeto é uma fórmula a não ser que possa ser obtido por um número finito de aplicações das regras acima.

São exemplos de fórmulas

$p \quad , \quad q \quad , \quad r$

$(\neg p) \quad , \quad (\neg q)$

$(p \wedge (\neg p))$

$((\neg q) \rightarrow (p \wedge (\neg p)))$

$(((\neg q) \rightarrow (p \wedge (\neg p))) \rightarrow q)$

$(p \vee q) \quad , \quad (p \rightarrow r) \quad , \quad (q \rightarrow r)$

$((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r))$

$(((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)) \wedge (q \rightarrow r))$

$((((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r)) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r)$

Não são exemplos de fórmulas

$$\neg p \quad , \quad q\neg \quad , \quad pq$$

$$((\neg p)) \quad , \quad p \wedge (\neg p)$$

$$((\neg q) \rightarrow (p \wedge \neg p)) \rightarrow (q)$$

Observação. Algumas expressões listadas acima não são fórmulas "apenas" por possuírem ocorrências de parênteses em falta ou em excesso.
Mais adiante, vamos considerar uma redução no uso dos parêntese, ao escrevermos as fórmulas da LC.

Sentenças e fórmulas

Em resumo, as fórmulas de LC são formadas por aplicação dos símbolos para conectivos lógicos

$$\neg \quad , \quad \wedge \quad , \quad \vee \quad , \quad \rightarrow \quad , \quad \leftrightarrow$$

aos símbolos para sentenças

$$p \quad , \quad q \quad , \quad r \quad , \quad \ldots$$

por aplicação de regras bem definidas de formação de fórmulas.

Elas correspondem às sentenças formadas por aplicação dos conectivos lógicos

não , e , ou , se...,então , se, e somente se

às sentenças atômicas (que correspondem aos símbolos para sentenças).

Classificação das fórmulas

A definição a seguir repete para as fórmulas, a classificação que já fizemos para sentenças.

Definição: Sejam φ e ψ fórmulas da LC. Dizemos que:

1. φ é **atômica** se é um símbolo para sentenças.
2. φ é **molecular** se não é uma símbolo para sentenças.
3. $(\neg\varphi)$ é a **negação** de φ.
   Dizemos também que φ é a **componente da negação**.
4. $(\varphi \wedge \psi)$ é a **conjunção** de φ com ψ.
   Dizemos também que φ é a **primeira componente** e ψ é a **segunda componente** da conjunção.

Classificação das fórmulas

5. $(\varphi \vee \psi)$ é a **disjunção** de φ com ψ.
   Dizemos também que φ é a **primeira componente** e ψ é a **segunda componente** da disjunção.

6. $(\varphi \rightarrow \psi)$ é a **implicação** de ψ por φ (observe a ordem em que as fórmulas estão sendo referidas).
   Dizemos também que φ é o **antecedente** e ψ é o **consequente** da implicação.

7. $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é a **biimplicação** de φ com ψ.
   Dizemos também que φ é a **primeira componente** e ψ é o **segunda componente** da biimplicação.

Parte 3

Subfórmulas

Subfórmulas

Como as fórmulas são obtidas a partir de outras por aplicações dos conectivos, uma relação desempenha um papel importante no desenvolvimento e na aplicac cão da LC é a de subfórmula.

Definição: Seja φ uma fórmula.

Uma **subfórmula** de φ é uma parte de φ que também é uma fórmula.

O conjunto das subfórmulas de φ é denotado por $\mathsf{SF}[\varphi]$.

Exemplos de subfórmulas

(a) $\mathsf{SF}[p] = \{p\}$.

(b) $\mathsf{SF}[((p \leftrightarrow (q \wedge (\neg q))) \leftrightarrow (\neg p))] =$
$\{p \;,\; q \;,\; (\neg p) \;,\; (\neg q) \;,\; (q \wedge (\neg q)) \;,\; (p \leftrightarrow (q \wedge (\neg q))) \;,$
$((p \leftrightarrow \; (q \wedge \; (\neg q))) \leftrightarrow \neg p)\}$.

$\mathsf{SF}[(((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \wedge s)))] =$
$\{p \;,\; q \;,\; r \;,\; s \;,\; (p \rightarrow q) \;,\; (r \rightarrow s) \;,\; (p \vee r) \;,\; (q \wedge s) \;,$
$((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \;,\; ((p \vee r) \rightarrow (q \wedge s)) \;,$
$(((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \wedge s)))\}$.

Parte 4

Exercícios

Exercício 1

Classifique como verdadeiro ou falso, justificando a sua escolha:

(i) Toda fórmula tem o mesmo número de abre e fecha parênteses.

(ii) $(p \to \wedge\ q)$ é uma fórmula.

Exercício 2

Dê exemplos de duas fórmulas φ e ψ e duas palavras α e β, todas formadas apenas com símbolos da LC, tais que as palavras

$$(\varphi \wedge \psi)$$

e

$$(\alpha \wedge \beta)$$

sejam idênticas, mas φ seja diferente de α.

Mais exercícios!

Lista de Exercícios – Aula 3

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Seja φ uma fórmula da LC. O **comprimento de** φ é o número de símbolos que ocorrem em φ.

1. Mostre que não existem fórmulas de comprimentos 2, 3 ou 6.
2. Mostre que se $n \neq 2, 3, 6$, então existe uma fórmula de comprimento n.

Exercício 2 Seja φ uma fórmula da LC. Denotamos por $\mathsf{NV}[\varphi]$ o número de variáveis que ocorrem em φ; e por $\mathsf{NC}[\varphi]$ o número de ocorrências de conectivos em φ.

1. Mostre que $\mathsf{NV}[\varphi]$ não é o número de ocorrências de variáveis em φ.
2. Mostre que $\mathsf{NC}[\varphi]$ não é o número de conectivos que ocorrem em φ.
3. Apresente uma estimativa para o número de subfórmulas de φ em função de $\mathsf{NV}[\varphi]$ e $\mathsf{NC}[\varphi]$.

Simbolização na Lógica dos Conectivos

Petrucio Viana & Renata de Freitas

IME - UFF

21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Reescrita e simbolização

Reescrita

O início da análise lógica de um enunciado consiste em reescrevê-lo de forma estruturada, com o uso dos conectivos.

Os dois primeiros passos para este fim são:

(1) Determinar os enunciados atômicos a partir dos quais ele é formado.

(2) Explicitar detalhadamente a maneira como ele é formado a partir dos enunciados atômicos, por meio dos conectivos.

Usualmente, este é um processo mental que não precisa ser (d)escrito em detalhes.

Simbolização

Após reescrevermos a sentença, passamos para a sua simbolização.

Esta é uma das (duas) principais ferramentas empregadas na análise lógica de uma sentença ou, de forma mais abrangente, na resolução de problemas por meio da análise lógica.

Vamos, agora, descrever o procedimento de simbolização em detalhes e ilustrar como ele deve ser (d)escrito.

Parte 2

Determinação das sentenças atômicas

Determinação das sentenças atômicas

O primeiro passo para a simbolização é reescrever

ler com atenção

a sentença e determinar as sentenças atômicas envolvidas ma sua formação.

Dependendo da complexidade da sentença, este passo pode ser feito apenas mentalmente.

Exemplo 1

Sentença:

x é primo.

Sentença atômica:

x é primo.

Exemplo 2

Sentença:

Ela não gosta de bebidas amargas.

Sentença atômica:

Ela gosta de bebidas amargas.

Exemplo 3

Sentença:

Está chovendo ou fazendo sol.

Sentenças atômicas:

Está chovendo.

Está fazendo sol.

Exemplo 4

Sentença:

Não é o caso que x não é primo.

Sentença atômica:

x é primo.

Exemplo 5

Sentença:

Se x não é primo, então x é igual a 1 ou x não tem um fator próprio.

Sentenças atômicas:

x é primo.

x é igual a 1.

x tem um fator próprio.

Exemplo 6

Sentença:

João e Ricardo são felizes por serem saudáveis e ricos.

Sentenças atômicas:

João é feliz.

Ricardo é feliz.

João é saudável.

Ricardo é saudável.

João é rico.

Ricardo é rico.

Observação

Na determinação das sentenças atômicas que compõem uma sentença dada, sempre buscamos as suas partes mais simples.

Por exemplo as sentenças atômicas que compõem a sentença

x é um número natural cujo quadrado é um número par que não é menor do que 10.000.000.

são:

x é número.

x é natural

o quadrado de x é número.

o quadrado de x é par.

o quadrado de x é menor do que 10.000.000.

Exercício 1

Determine a(s) sentença(s) atômica(s) que ocorre(m) em cada sentença:

(i) 2 *é par.*

(ii) 3 *não é par.*

(iii) *Eu trabalho, os outros ficam ricos.*

(iv) $f(x)$ *não é derivável ou é contínua.*

(v) *Se estudo para a prova,não vou à praia e nem ao cinema.*

(vi) *Sou realizado se, e somente se, planto uma árvore, escrevo um livro e tenho um filho.*

Exercício 2

Determine a(s) sentença(s) atômica(s) que ocorre(m) em cada sentença:

(i) *João é esperto.*

(ii) *Ricardo não é bobo.*

(iii) *Perdoar é fácil e faz bem.*

(iv) *João ou Ricardo voltou atrás.*

(v) *Se João pediu desculpas, provou que é humilde.*

(vi) *Se aceitou as desculpas, ele provou que é generoso.*

Parte 2

Legendas

Legendas

O segundo passo para a simbolização é simbolizar as sentenças atômicas já determinadas.

Para isto, usamos uma tabela, chamada de legenda, que faz corresponder um símbolo para sentença a cada sentença atômica já determinada.

Legendas

Definição. Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sentenças atômicas, distintas duas a duas.

Uma **legenda** para $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ é uma tabela da forma:

$$\begin{array}{ccc} s_1 & : & \alpha_1 \\ s_2 & : & \alpha_2 \\ & \vdots & \\ s_n & : & \alpha_n \end{array}$$

onde $s_1, s_2, \ldots, s_n$ são n símbolos para sentenças, distintos dois a dois.

Legendas

Observe que usamos “ : ” e não “ $=$ ” nas legendas.

Formalmente, só usamos os símbolos para sentenças — ou seja, as letras p, q, r, s, t, indexadas ou não — nas legendas.

Na prática, usamos qualquer letra minúscula do alfabeto latino que acharmos conveniente.

Legenda para uma sentença

As sentenças que ocorrem nas legendas são atômicas, ou seja, não possuem ocorrências de nenhum dos conectivos *não*, *e*, *ou*, *se . . .* , *então* ou *se, e somente se*.

E devem estar escritas da maneira a mais completa possível, de acordo com a sentença dada.

Legenda para uma sentença

Definição. Seja φ uma sentença.
Uma **legenda** para φ é uma legenda para as sentenças atômicas que ocorrem em α.

Na prática, quando várias sentenças estiverem simultaneamente em questão, podemos definir uma única legenda para simbolizar todas elas.

Exemplo 7

Sentença:

Ela gosta de bebidas amargas.

Exemplo 7

Sentença:

Ela gosta de bebidas amargas.

Legenda:

g : *Ela gosta de bebidas amargas.*

Exemplo 8

Sentença:

Ela não gosta de bebidas amargas.

Exemplo 8

Sentença:

Ela não gosta de bebidas amargas.

Legenda:

g : *Ela gosta de bebidas amargas.*

Exemplo 9

Sentença:

Não é o caso que x não é primo.

Exemplo 9

Sentença:

Não é o caso que x não é primo.

Legenda:

p : *x é primo.*

Exemplo 10

Sentença:

Está chovendo ou está fazendo sol.

Exemplo 10

Sentença:

Está chovendo ou está fazendo sol.

Legenda:

c : *Está chovendo.*
s : *Está fazendo sol.*

Exemplo 11

Sentença:

Se x não é primo, então x é igual a 1 ou x não tem um fator próprio.

Exemplo 11

Sentença:

> *Se x não é primo, então x é igual a 1 ou x não tem um fator próprio.*

Legenda:

$$\begin{array}{lcl} p & : & x \textit{ é primo.} \\ u & : & x \textit{ é igual a } 1. \\ f & : & x \textit{ tem um fator próprio.} \end{array}$$

Exemplo 12

Sentença:

Eu vou, eu vou e eu vou.

Legenda:

v : Eu vou.

Exercício 3

Para cada sentença abaixo, defina uma legenda:

(i) *P é um ponto de acumulação.*

(ii) 4 *não é um quadrado perfeito.*

(iii) 4 *nunca foi um número primo.*

(iv) *Eu trabalho e ganho dinheiro.*

(v) *Eu trabalho, mas não ganho dinheiro.*

(vi) *Eu não estudo ou não me divirto.*

Exercício 3

(vii) *Se eu não vou ao jogo, lavo o carro.*

(viii) *Caso eu lave o carro, vou ao jogo.*

(ix) *Eu vou ao jogo se não lavar o carro.*

(x) *Eu lavo o carro quando vou ao jogo.*

(xi) *O dia está nublado se, e somente se, o sol está encoberto.*

(xii) *O dia não está nublado quando, e somente quando, o sol brilha no céu.*

Parte 4

Procedimento de simbolização

Simbolização

Após encontrar os enunciados atômicos e definir uma legenda, o último passo para a simbolização é, simplesmente, simbolizar o enunciado baseado na legenda.

Duas simplificações são usuais, neste processo:

1. Não escrever o par de parênteses mais externo na fórmula que simboliza o enunciado.
2. Não escrever os pares de parênteses em volta das negações, quando não houver dúvidas a que fórmula o $\neg$ está sendo aplicado.

Exemplo 13

Enunciado:

Ela gosta de bebidas amargas.

Legenda:

g : *Ela gosta de bebidas amargas.*

Simbolização:

$$g$$

Exemplo 14

Enunciado:

Ela não gosta de bebidas amargas.

Legenda:

g : *Ela gosta de bebidas amargas.*

Simbolização:

$$\neg g$$

Exemplo 15

Enunciado:

Não é o caso que x não é primo.

Legenda:

p : x *é primo.*

Simbolização:

$$\neg\neg p$$

Exemplo 16

Enunciado:

Está chovendo ou está fazendo sol.

Legenda:

c : *Está chovendo.*
s : *Está fazendo sol.*

Simbolização:

$$c \vee s$$

Exemplo 17

Enunciado:

Se x não é primo, então x é igual a 1 ou x não tem um fator próprio.

Legenda:

$$
\begin{array}{lcl}
p & : & x \text{ é primo.} \\
u & : & x \text{ é igual a } 1. \\
f & : & x \text{ tem um fator próprio.}
\end{array}
$$

Simbolização:

$$\neg p \rightarrow (u \vee \neg f)$$

Exemplo 18

Enunciado:

Se 2 é par e 3 é par, então 2 é par.

Legenda:

$$\begin{array}{lcl} d & : & 2 \text{ é par.} \\ t & : & 3 \text{ é par.} \end{array}$$

Simbolização:

$$(d \wedge t) \to d$$

Exercício 4

Simbolizar na LC:

(i) *Eu gosto de Lógica.*

(ii) *Lógica não é difícil.*

(iii) *Não é o caso que* 8 *não é maior do que* 7.

(iv) *Lógica não é fácil, mas é interessante.*

(v) 25 *não é um quadrado perfeito e nem é um múltiplo de* 5.

Exercício 4

(vi) *Eu estudo bastante ou não passo em Lógica.*

(vii) f *está bem definida e o seu gráfico é uma reta, ou ela não é contínua.*

(viii) *Se ela aprende com facilidade, então: eu vou estudar com ela e ela vai me ensinar a matéria.*

(ix) *Se* x^2 *é ímpar e* x *não é diferente de* 0, *então* x *não é par.*

(x) *Eu passo em Lógica se, e somente se, eu estudo bastante e tiro as minhas dúvidas.*

(xi) n *é um número primo se, e somente se, não é igual a* 1 *e nem possui fatores próprios.*

Exercício 5

Simbolize as sentenças a seguir, na LC, de acordo com a seguinte legenda:

$$\begin{array}{lcl} p_1 & : & \textit{Eliane possui um Porsche} \\ p_2 & : & \textit{Kátia possui um Porsche} \\ p_3 & : & \textit{Marília possui um Porsche} \\ f_1 & : & \textit{Eliane possui uma Ferrari} \\ f_2 & : & \textit{Kátia possui uma Ferrari} \\ f_3 & : & \textit{Marília possui uma Ferrari} \\ z_1 & : & \textit{Eliane possui um Zenvo} \\ z_2 & : & \textit{Kátia possui um Zenvo} \\ z_3 & : & \textit{Marília possui um Zenvo} \end{array}$$

(i) *Eliane não possui um Porsche, mas Kátia sim.*

(ii) *Eliane possui um Porsche e Kátia não.*

(iii) *Nem Eliane nem Kátia possuem Ferraris.*

Exercício 5

(iv) *Kátia ou Marília possui um Zenvo.*

(v) *Kátia ou Marília não possui um Zenvo.*

(vi) *Se Eliane possui um Zenvo, Kátia e Marília não possuem Porches*

(vii) *Se Eliane não possui um Zenvo, Kátia e Marília sim.*

(viii) *Se Eliane possui um Zenvo, Kátia ou Marília também.*

Exercício 5

(ix) *Alguma das três possui uma Ferrari.*

(x) *Alguma das três possui ambos uma Ferrari e um Zenvo.*

(xi) *Nenhuma das três possui um Porche.*

(xii) *Todas as três possuem Porches.*

(xiii) *Eliane, Kátia e Marília não possuem Zenvos.*

Exercício 6

Simbolizar as seguintes sentenças, na LC:

(i) *Rafael é feliz pois Júlia gosta dele.*

(ii) *Rafael é feliz, dado que Júlia gosta de Rafael e ela é feliz.*

(iii) 0 *e* 2 *são pares.*

(iv) *Kurt Gödel e Hao Wang são amigos.*

(v) 1 *está entre* 0 *e* 2*.*

Exercício 6

(vi) *Todos os números*, 2, 3, 5 *e* 7 *são primos.*

(vii) *Todos os números naturais são positivos.*

(viii) *Ao menos um dos números*, 2, 3, 4 *e* 6 *é primo.*

(ix) *Ao menos um número natural é nulo.*

(x) *Exatamente um dos números* 1, 2 *e* 4 *é primo.*

(xi) *No máximo um dos números* -1, 0 *e* 1 *é positivo.*

Exercícios

Mais exercícios!

Lista de Exercícios – Aula 4

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Para cada uma das sentenças a seguir, faça o que se pede:

(i) Classificar como atômica, negação, conjunção, disjunção, implicação ou biimplicação.

(ii) Definir uma legenda e simbolizar em LC.

1. Não acontece que Paulo vá reprovar toda a turma.
2. Marcelo e Paulo são inteligentes.
3. Marcelo e Paulo são grandes amigos.
4. Marcelo e Paulo são meus grandes amigos.
5. Marcelo e Paulo são chatos e sem graça.
6. Marcelo é gente fina mas Paulo não.
7. Marcelo não é bem humorado mas Paulo sim.
8. Nem Marcelo nem Paulo gostam de quem não estuda.
9. Marcelo é chato ou é mal humorado.
10. Marcelo vai de carro ou vai de ônibus, mas não ambos.
11. Marcelo ou Paulo é o melhor professor.
12. Paulo é o melhor professor ou o melhor atleta.
13. Se provocado, Marcelo reage.
14. Paulo não mente, se a pergunta for sobre Matemática.
15. Marcelo fica irritado, quando os alunos conversam.
16. Quando os alunos conversam, Paulo fica bravo.
17. Para Marcelo ficar feliz basta todo mundo estudar.

Semântica da Lógica dos Conectivos

Petrucio Viana & Renata de Freitas

IME, UFF
21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Semântica dos conectivos

Princípios para a semântica de LC

Quando estamos diante de uma fórmula ou de um conjunto de fórmulas, consideramos que:

1. Existe um contexto onde as fórmulas recebem valores (Verdadeiro ou Falso).
2. Cada fórmula, em um dado contexto, possui um valor bem definido.
3. O valor de cada fórmula atômica depende do contexto.

Princípios para a semântica de LC

Para cada fórmula atômica, assumimos que existem contextos nos quais ela é verdadeira e existem contextos nos quais ela é falsa.

Por exemplo, no contexto atual, a sentença atômica

Petrúcio é casado com a Gisele Bündchen.

é falsa.

Mas, existe um contexto no qual ela é verdadeira.

Princípios para a semântica de LC

4. O valor (Verdadeiro ou Falso) de uma sentença molecular depende exclusivamente do valor das sentenças utilizadas na sua formação.

5. O comportamento de cada conectivo em relação à determinação do valor de uma sentença é análogo ao modo como estes conectivos são utilizados em contextos matemáticos.

Negação

Na Linguagem Matemática, o *não* é utilizado quando queremos negar o conteúdo de uma sentença.

Este é exatamente o sentido do *não* na definição do complementar de um conjunto:

$$u \in \overline{A} \text{ se, e somente se, } u \notin A$$

Regra de avaliação do $\neg$

1. Uma negação é V se o componente é F.

2. Uma negação é F se o componente é V

Tabela de avaliação do $\neg$

Dada uma fórmula φ, temos:

φ	$(\neg\varphi)$
V	F
F	V

Este não é exatamente o uso que se faz do *não* na Língua Portuguesa:

A que nível de moral não descem as pessoas.

A que nível de moral descem as pessoas.

Conjunção

Na Linguagem Matemática, o *e* é utilizado quando queremos afirmar a ocorrência simultânea de dois fatos.

Este é exatamente o sentido do *e* na definição da interseção de dois conjuntos:

$$u \in A \cap B \text{ se, e somente se, } u \in A \text{ e } u \in B$$

Regra de avaliação do $\wedge$

1. Uma conjunção é V se seus componentes são simultaneamente verdadeiros.

2. Uma conjunção é F se ao menos um dos seus componentes é F.

Tabela de avaliação do $\wedge$

Dadas as fórmulas φ e ψ, temos:

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*F*

Este não é exatamente o uso que se faz do *e* na Língua Portuguesa:

O palhaço saiu correndo e o circo pegou fogo.

O circo pegou fogo e o palhaço saiu correndo.

Disjunção

Na Linguagem Matemática, o *ou* é utilizado quando queremos apresentar alternativas que não se excluem necessariamente.

Este é exatamente o sentido do *ou* na definição da união de dois conjuntos:

$$u \in A \cup B \text{ se, e somente se, } u \in A \text{ ou } u \in B$$

Regra de avaliação do $\vee$

1. Uma disjunção é F se seus componentes são simultaneamente F.

2. Uma disjunção é V se ao menos um dos seus componentes é V.

Regra de avaliação do $\vee$

Dadas as fórmulas φ e ψ, temos:

φ	ψ	$(\varphi \vee \psi)$
V	*V*	*V*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

Este não é exatamente o uso que se faz do *ou* na Língua Portuguesa:

Amanhã vai chover ou o dia vai ficar nublado.

Marcelo é flamenguista ou tricolor.

Biimplicação

Na Linguagem Matemática, o se, e somente se é utilizado quando queremos dizer que duas sentenças têm o mesmo conteúdo.

Este é exatamente o sentido do *se, e somente se* nas definições na Teoria dos Conjuntos:

Um conjunto é vazio se, e somente se, não possui elementos.

Regra de avaliação do $\leftrightarrow$

1. Uma biimplicação é V se seus componentes possuem os mesmos valores.

2. Uma biimplicação é F se seus componentes possuem valores distintos.

Tabela de avaliação do $\leftrightarrow$

Dadas duas fórmulas quaisquer φ e ψ, temos:

φ	ψ	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*V*

Este não é exatamente o uso que se faz do *se, e somente se*, na Língua Portuguesa:

Brasília é a capital do Brasil se, e somente se, 2 *é par.*

Brasília é a capital da França se, e somente se, 2 *é ímpar.*

Implicação

O valor de uma implicação depende da existência de alguma relação de *causa* e *efeito* entre o antecedente e o consequente.

Paulo fica doente.
O médico receita um remédio para Paulo.

Se Paulo fica doente, então o médico receita um remédio para Paulo.

Se o médico receita um remédio para Paulo, então Paulo fica doente.

Implicação

Usualmente, o se...então não forma sentenças cujo valor, em um dado contexto, depende exclusivamente do valor de seus componentes, neste contexto.

Temos que definir a semântica do se...então de modo a "consertar este defeito".

Temos duas maneiras de fazer isto. Em ambas, chegamos ao mesmo lugar.

"Para todo" e "se...então"

A primeira maneira é examinar a interação do "para todo" com o "se...então".

Na Linguagem Matemática, o se...então é utilizado quando queremos apresentar uma condição para que algo se verifique.

Este é exatamente o sentido do se...então na definição da inclusão de dois conjuntos:
A é subconjunto de B se, e somente se, para todo $u \in U$, se $u \in A$, então $u \in B$.

“Para todo” e “se...então”

$U = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$ e $B = \{1, 2\}$

Temos, de maneira clara, que $A \subseteq B$.

Assim:

$$\begin{array}{l} 1 \in A \to 1 \in B \\ 2 \in A \to 2 \in B \\ 3 \in A \to 3 \in B \end{array}$$

são V.

“Para todo” e “se...então”

Logo, devemos especificar:

$$\begin{array}{lcl} V \rightarrow V & : & V \\ F \rightarrow V & : & V \\ F \rightarrow F & : & V \end{array}$$

A tabela de avaliação do $\rightarrow$ deve terminar com:

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$
V	V	V
V	F	?
F	V	V
F	F	V

“Para todo” e “se...então”

É natural considerar

$$V \to F : F$$

Assim, temos a *tabela de avaliação do* $\to$:

φ	ψ	$(\varphi \to \psi)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Este não é exatamente o uso que se faz do *se, e somente se*, na Língua Portuguesa.

Se $2+2=5$, *então há vida em Marte.*

Se $2+2=5$, *então não há vida em Marte.*

Tabelas inaceitáveis

A segunda maneira é classificar as opções da tabela como aceitáveis ou não.

Escolha aceitável:

$$V \to V : V$$

A tabela de avaliação do $\to$ deve iniciar do seguinte modo:

φ	ψ	$(\varphi \to \psi)$
V	V	V
V	F	?
F	V	?
F	F	?

Tabelas inaceitáveis

Outra escolha aceitável:

$$V \rightarrow F : F$$

A tabela de avaliação do $\rightarrow$ deve continuar do seguinte modo:

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$
V	V	V
V	F	F
F	V	?
F	F	?

Tabelas inaceitáveis

Quais são as escolhas aceitáveis para

φ	ψ	$(\varphi \to \psi)$
F	V	?
F	F	?

Existem 4 quatro opções, que podem ser dispostas na seguinte tabela:

φ	ψ	(1)	(2)	(3)	(4)
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F

Tabelas inaceitáveis

(4) é a tabela do $\vee$:

φ	ψ	(1)	(2)	(3)	$(\varphi \wedge \psi)$
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*

Isto é inaceitável.

Tabelas inaceitáveis

(3) é a tabela do $\leftrightarrow$:

φ	ψ	(1)	(2)	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$(\varphi \wedge \psi)$
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*

Isto é inaceitável.

Tabelas inaceitáveis

(2) é a tabela do ψ:

φ	ψ	(1)	ψ	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$(\varphi \wedge \psi)$
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*

Isto é inaceitável.

Regra de avaliação do $\rightarrow$

A única opção aceitável é (1):

1. Uma implicação é F se o antecedente é V e o consequente é F.
2. Uma implicação é V em todos os outros casos.

Tabela de avaliação do $\rightarrow$

Dadas as fórmulas φ e ψ, temos:

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*F*	*V*

E esta é a única tabela aceitável!

Em resumo

Definição. As seguintes são as **tabelas de avaliação dos conectivos**:

φ	$(\neg\varphi)$
V	F
F	V

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$	$(\varphi \vee \psi)$	$(\varphi \to \psi)$	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Aqui temos 4 tabelas escritas juntas.

Exercício 1

Dadas as seguintes sentenças e seus respectivos valores:

0 *é par*	:	V
1 *é par*	:	F
2 *é par*	:	V
2 *é primo*	:	V
3 é par	:	F

determine o valor de cada sentença abaixo, de acordo com as tabelas de avaliação dos conectivos:

(i) 0 *não é par*

(ii) 1 *não é par*

(iii) 0 *é par e* 2 *é par*

(iv) 0 *é par e* 1 *é par*

Exercício 1

(v) 1 *é par e* 2 *é par*

(vi) 1 *é par e* 3 *é par*

(vii) 2 *é par ou* 2 *é primo*

(viii) 2 *é par ou* 1 *é par*

(ix) 1 *é par ou* 2 *é primo*

(x) 1 *é par ou* 3 *é par*

(xi) *se* 0 *é par, então* 2 *é par*

Exercício 1

(xii) *se* 0 *é par, então* 1 *é par*

(xiii) *se* 1 *é par, então* 0 *é par*

(xiv) *se* 1 *é par, então* 3 *é par*

(xv) 0 *é par se, e somente se,* 2 *é par*

(xvi) 0 *é par se, e somente se,* 1 *é par*

(xvii) 1 *é par se, e somente se,* 2 *é par*

(xviii) 1 *é par se, e somente se,* 3 *é par*

Exercício 2

Determine o valor de cada sentença abaixo:

(i) $\neg(8+2=11) \wedge (2^3 > 3^2)$

(ii) $(2^{2^2}\ \textit{é par}) \vee (2^{2^2} > 2)$

(iii) $(8-3=4) \rightarrow (\sqrt{2}\ \textit{é algébrico})$

(iv) $\neg(0=1) \leftrightarrow \neg(\sqrt{2}\ \textit{é racional})$

Parte 2

Uma aplicação simples

Observação

Sempre que for conveniente e não trouxer ambiguidades, não escreveremos o par de parênteses externo das fórmulas.

Além dos parênteses, usaremos símbolos como $\langle$, $\{$, $[$, $]$, $\}$ e $\rangle$ para explicitar a estrutura das fórmulas.

Também, lemos o símbolo de negação como aplicado a menor fórmula que ocorre imediatamente após a sua ocorrência.

Que dia é hoje...

Considere as sentenças:

(i) *Hoje não é terça*.
(ii) *Hoje é sábado e ontem foi sexta*.
(iii) *Hoje é sábado ou amanhã não será terça*.
(iv) *Se hoje não é segunda, então amanhã também não será terça*.
(v) *Hoje não é sábado se, e somente se, ontem foi sexta*.

Classificá-las como V ou F.

Primeiro passo

Determinar as sentenças atômicas usadas na formação das sentenças dadas:

hoje é terça

hoje é sábado

ontem foi sexta

amanhã será terça

hoje é segunda

Segundo passo

Estabelecer uma correspondência entre as sentenças atômicas e as símbolos para sentenças que serão usadas para representá-las.

Em LC, não é usual considerarmos o tempo verbal como relevante na análise das sentenças atômicas.

p : *hoje é terça*

q : *hoje é sábado*

r : *ontem é sexta*

s : *amanhã é terça*

t : *hoje é segunda*

Terceiro passo

Simbolizar as sentenças dadas, de acordo com a correspondência definida, possivelmente, eliminando parênteses obviamente desnecessários.

(i′)	$(\neg p)$	:	$\neg p$
(ii′)	$(q \wedge r)$	:	$q \wedge r$
(iii′)	$[q \vee (\neg s)]$	:	$q \vee \neg s$
(iv′)	$[(\neg t) \rightarrow (\neg s)]$	:	$\neg t \rightarrow \neg s$
(v′)	$[(\neg q) \leftrightarrow r]$	:	$\neg q \leftrightarrow r$

Passo intermediário

Para calcular os valores de (i′), (ii′), (iii′), (iv′) e (v′), devemos ter os valores de p, q, r, s e t.

Mas estes dependem do contexto no qual (i), (ii), (iii), (iv) e (v) são proferidas.

Esta é a informação que define a interpretação que segue.

Quarto passo

Sabemos que as sentenças (i), (ii), (iii), (iv) e (v) foram proferidas num sábado.

Temos então, a seguinte interpretação para os símbolos para sentenças:

$$\begin{array}{rccc}
(\textit{hoje é terça}) & p & : & F \\
(\textit{hoje é sábado}) & q & : & V \\
(\textit{ontem é sexta}) & r & : & V \\
(\textit{amanhã é terça}) & s & : & F \\
(\textit{hoje é segunda}) & t & : & F
\end{array}$$

Passo final

Usando as tabelas dos conectivos, calculamos os valores das fórmulas, de acordo com a interpretação definida:

$$
\begin{array}{lllll}
(\mathrm{i}') & \neg p & : & V \\
(\mathrm{ii}') & q \wedge r & : & V \\
(\mathrm{iii}') & q \vee \neg s & : & V \\
(\mathrm{iv}') & \neg t \rightarrow \neg s & : & V \\
(\mathrm{v}') & \neg q \leftrightarrow r & : & F
\end{array}
$$

Ploriferação de interpretações

A interpretação considerada anteriormente foi definida considerando-se que as sentenças foram proferidas em um sábado.

Poderíamos ter interpretações diferentes, se considerássemos que as sentenças foram proferidas em outros dias da semana:

	p	q	r	s	t
domingo	F	F	F	F	F
segunda	F	V	F	F	V
terça	V	F	F	F	F
quarta	F	F	V	V	F
quinta	F	F	F	F	F
sexta	F	F	F	F	F
sábado	F	V	V	F	F

p : *hoje é terça*, q : *hoje é sábado*, r : *ontem é sexta*,
s : *amanhã é terça*, t : *hoje é segunda*

Ploriferação de interpretações

Usando essa tabela, podemos observar que algumas fórmulas são V em alguns dias e F em outras, mas outras fórmulas mantém seu valor, mesmo quando mudamos o dia da semana em que a fórmula é avaliada.

	p	q	r	s	t	$\neg p$	$\neg t \to \neg s$	$\neg q \leftrightarrow r$
domingo	F	F	F	F	F	V	V	F
segunda	F	V	F	F	V	V	V	F
terça	V	F	F	F	F	F	V	F
quarta	F	F	V	V	F	V	V	F
quinta	F	F	F	F	F	V	V	F
sexta	F	F	F	F	F	V	V	F
sábado	F	V	V	F	F	V	V	F

Ploriferação de interpretações

Poderíamos ainda listar todas as interpretações possíveis, considerando o preceito de que *sentenças atômicas são avaliadas de maneira independente*:

p	q	r	s	t
V	V	V	V	V
V	V	V	V	F
V	V	V	F	V
V	V	V	F	F
V	V	F	V	V
V	V	F	V	F
V	V	F	F	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	V	V	F
V	F	V	F	V
V	F	V	F	F
V	F	F	V	V
V	F	F	V	F
V	F	F	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	V	V	F
F	V	V	F	V
F	V	V	F	F
F	V	F	V	V
F	V	F	V	F
F	V	F	F	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V
F	F	V	V	F
F	F	V	F	V
F	F	V	F	F
F	F	F	V	V
F	F	F	V	F
F	F	F	F	V
F	F	F	F	F

Parte 4

Interpretações e tabelas de avaliação

Interpretações são funções

No exemplo anterior, associamos um valor a cada símbolo para sentenças em $\{p, q, r, s, t\}$ e cada símbolo para sentenças em $\{p, q, r, s, t\}$ teve um único valor associado.

Assim, formalmente, uma interpretação para $\{p, q, r, s, t\}$ é uma função:

$$\begin{array}{rccc} I: & \{p, q, r, s, t\} & \longrightarrow & \{V, F\} \\ & S & \longrightarrow & I[S], \end{array}$$

que associa um valor, V ou F, a cada símbolo para sentenças, $S \in \{p, q, r, s, t\}$.

Interpretações são funções

Como, a partir de I, por intermédio das tabelas dos conectivos, associamos um valor a cada fórmula e cada fórmula teve associado um único valor, o que fizemos foi calcular o valor da interpretação para cada fórmula dada:

$$\begin{array}{rccc} I: & \text{FLC} & \to & \{V, F\} \\ & \varphi & \to & I[\varphi], \end{array}$$

onde $\varphi \in \{\neg p \quad , \quad q \wedge r \quad , \quad q \vee \neg s \quad , \quad \neg t \to \neg s \quad , \quad \neg q \leftrightarrow r\}$.

Observe que o valor de I pode ser calculado para qualquer fórmula formada com símbolos para sentenças em $\{p, q, r, s, t\}$.

Interpretações

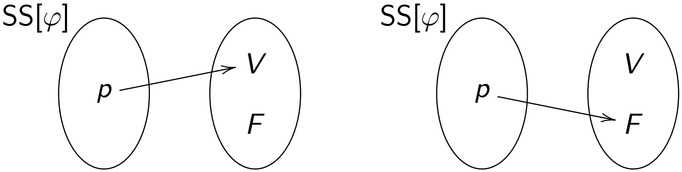
Definição. Seja C um conjunto de símbolos para sentenças.
Uma **interpretação** para C é uma função I que associa um valor a cada símbolo para sentença que ocorre em C, ou seja, é uma função de C em $\{V, F\}$.

Definição. Seja $\varphi \in$ FLC.
O **conjunto dos símbolos para sentenças** que ocorrem em φ é denotado por SS$[\varphi]$.

Definição. Seja $\varphi \in$ FLC.
Uma **interpretação para** φ é uma interpretação para SS$[\varphi]$, ou seja, uma função de SS$[\varphi]$ em $\{V, F\}$.

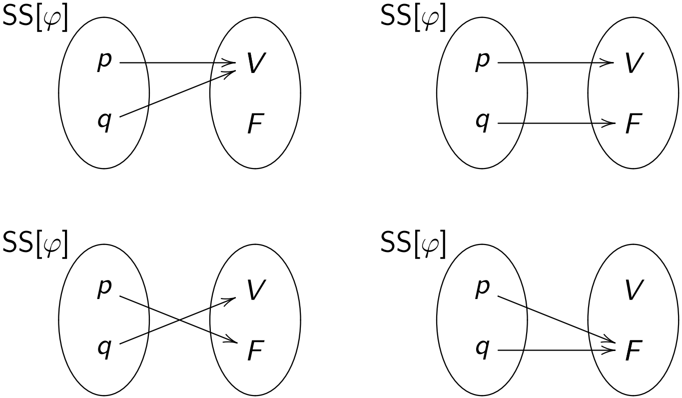
$\mathrm{SS}[\varphi] = \{p\}$

Existem duas interpretações para φ:



$\mathsf{SS}[\varphi] = \{p, q\}$

Existem quatro interpretações para φ:



Número de interpretações

Teorema. Para todo conjunto $\{s_1, \ldots, s_m\} \subseteq \mathrm{SS}$, existem exatamente 2^m interpretações distintas para $\{s_1, \ldots, s_m\}$.

m	2^m
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
$\vdots$	$\vdots$

10^{82} é o número estimado de átomos no *universo observável*.

Interpretações vistas como "vetores"

Para cada fórmula φ, cada interpretação para φ pode ser considerada como um "vetor" indexado pelos símbolos para sentenças que pertencem a SS[φ]:

s_1	s_2	$\dots$	s_m
?	?	$\dots$	?

onde cada ocorrência de ? é um dos valores V ou F.

Listando todos estes "vetores", podemos associar a φ uma tabela de avaliação, $T[\varphi]$, que mostra todas as interpretações para φ e descreve o "comportamento" de φ em cada uma delas.

Tabelas de avaliação

Definição. Seja $\varphi \in \mathrm{FLC}$, tal que $\mathrm{SS}[\varphi] = \{s_1, \ldots, s_m\}$.

A **tabela de avaliação de** φ, denotada por $\mathrm{T}[\varphi]$, pode ser construída mediante a execução dos seguintes passos:

1. Em uma *linha de referência*, escreva as símbolos para sentenças s_1, s_2, ..., s_m.

2. Abaixo da linha de referência, escreva, uma a uma, dispostas em linhas, todas as 2^m interpretações para s_1, s_2, ..., s_m.

3. Utilizando as tabelas de avaliação dos conectivos, calcule gradativamente todos os valores de cada subfórmula de φ, até obter o valor de φ.

4. Ao final do processo, a matriz formada pelas m primeiras colunas em conjunto com a última coluna (indexada por φ) é $T[\varphi]$.

Teorema da Concordância. $T[\varphi]$ contém informação suficiente para determinarmos o valor de φ sob qualquer assinalação de valores para qualquer conjunto de símbolos para sentenças que contenha $\mathrm{SS}[\varphi]$.

$T[(p \wedge q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow \neg q)]$

Seja $\varphi : (p \wedge q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow \neg q)$.

Observe que $\text{SS}[\varphi] = \{p, q\}$.

1. Escrever a linha de referência:

p	q

2. Listar abaixo da linha de referência, uma a uma, dispostas em linhas, todas 2^m as interpretações para φ:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

$T[(p \wedge q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow \neg q)]$

3. Para cada interpretação I, utilizar as tabelas de avaliação dos conectivos para calcular gradativamente todos os valores de cada subfórmula de φ, até obter $I[\varphi]$.

Observe que $\mathrm{SF}[\varphi] = \{p, q, p \wedge q, \neg p, \neg q, (\neg p) \rightarrow \neg q, \varphi\}$.

(i) Pela tabela do $\wedge$:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$T[(p \wedge q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow \neg q)]$

(ii) Pela tabela do $\neg$:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$
V	V	V	F
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	V

(iii) Pela tabela do $\neg$:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	F	V	V

$T[(p \wedge q) \to ((\neg p) \to \neg q)]$

(iv) Pela tabela do $\to$:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \to \neg q$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V

(v) Pela tabela do $\to$:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \to \neg q$	φ
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

$T[(p \wedge q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow \neg q)]$

4. T[φ] é a tabela formada pelas m primeiras colunas seguida da última coluna:

p	q	$(p \wedge q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow \neg q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Uma tabela de avaliação é uma matriz de V's ou F's.

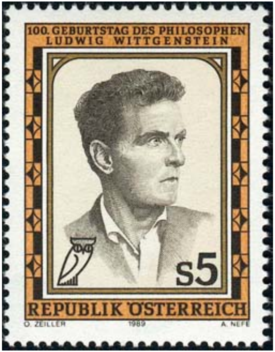
Toda fórmula φ tem uma tabela $T[\varphi]$.

Fundadores da semântica de LC . . .

Peirce (1839 – 1914)

Criou as tabelas de valores (tabelas-verdade).

Fundadores da semântica de LC . . .



Wittgenstein (1889 – 1851)

Criou as tabelas de valores (tabelas-verdade).

Exercício 3

Construa a tabela de cada fórmula abaixo:

(i) $p \vee (p \rightarrow \neg p)$

(ii) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

(iii) $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r)] \rightarrow [(\neg p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg r)]$

(iv) $[p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \leftrightarrow [\neg p \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg r)]$

Exercício 3

Para verificar as respostas, consulte:

http://web.stanford.edu/class/cs103/tools/truth-table-tool/

Mas, cuidado, em nossa disciplinas nós usamos única e exclusivamente os símbolos especificados nas aulas sobre sintaxe.

Exercício 4

Em cada item abaixo, determine o valor de q, de acordo com as informações dadas:

(i) $p : V$ e $p \wedge \neg q : V$

(ii) $p : F$ e $p \vee q : V$

(iii) $p : V$ e $p \to q : V$

(iv) $p : F$ e $q \to p : V$

(v) $p : F$ e $p \leftrightarrow q : F$

Exercício 5

Sabendo que $p \wedge q : V$ e $p \to r : F$, determine o valor de cada fórmula abaixo:

(i) $[\neg\neg\neg(p \wedge \neg q)] \wedge (\neg p \wedge \neg q)$

(ii) $[(p \vee q) \wedge (q \vee r)] \vee r$

(iii) $\{\neg\neg[(\neg q) \wedge r]\} \to \neg\neg p$

(iv) $[\neg\neg\neg(p \to \neg q)] \wedge (\neg p \to \neg q)$

(v) $\langle\{[(q \vee r) \wedge s] \to t\} \vee p\rangle \to (q \wedge r)$

Exercício 6

Determine, se possível, uma interpretação para p, q, r, s, na qual $p \rightarrow (r \vee s)$ seja F e $(q \wedge \neg s) \leftrightarrow p$ seja V.

Parte 4

Exercícios

Mais exercícios!

Lista de Exercícios – Aula 5

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Considerando que $p \to q : F$, determine o valor das seguintes fórmulas:

1. $(p \to q) \to (q \vee r)$
2. $(p \vee r) \to (p \to q)$
3. $p \to (q \to r)$
4. $p \to [q \vee (r \to r)]$
5. $(p \to q) \to (\neg p \vee q)$

Exercício 2 Verifique se a informação dada é suficiente para determinar o valor de cada fórmula:

1. $(p \to q) \to r$, quando $r : V$.
2. $p \vee (q \to r)$, quando $q \to r : V$.
3. $(p \wedge q) \to (p \vee s)$, quando $s : F$.
4. $[(p \wedge q) \wedge r] \to r$, quando $q : F$.
5. $[(p \vee q) \to (q \wedge q)] \to (r \wedge p) \vee q)$, quando $(\neg q) : F$.

Exercício 3 Dadas as sentenças:

φ : Niterói é uma cidade ou $2 = 7$.
ψ : Não é o caso que $6 > 6 + 1$.
θ : Se $-2 > 0$, então $6 > 5$.

determine o valor de cada uma das seguintes sentenças:

1. $\varphi \vee \theta$
2. $\psi \wedge \theta$

Equivalência na Lógica dos Conectivos

Petrucio Viana & Renata de Freitas

IME - UFF

21 de março de 2023

Sumário

Equivalência de sentenças

Simbolização não é determinística

Dependendo de como entendemos o significado de uma sentença, ela pode ser simbolizada de mais de uma maneira.

Fiquei bronzeado pois fui à praia.

LC vai à praia

Fiquei bronzeado pois fui à praia.

$$\begin{array}{lcl} b & : & \textit{Eu fiquei bronzeado.} \\ p & : & \textit{Eu fui à praia.} \end{array}$$

Simbolização que leva em conta "apenas"; o aspecto condicional da sentença:

$$p \rightarrow b$$

LC vai à praia

Outras análises podem levar a outras simbolizações.

Simbolização que leva em conta “apenas” o aspecto afirmativo da sentença:

$$p \wedge q$$

LC vai à praia

Outras análises podem levar a outras simbolizações.

Simbolização que leva em conta ambos os aspectos, condicional e afirmativo, da sentença:

$$p \wedge (p \to b)$$

Observação

Lembre-se: podemos não escrever o par de parênteses externo, quando ficar claro qual é a fórmula em questão.

Por exemplo, podemos escrever

$$\neg p \quad , \quad p \wedge (q \to r) \quad , \quad (p \vee q) \leftrightarrow (\neg s)$$

ao invés de

$$(\neg p) \quad , \quad (p \wedge (q \to r)) \quad , \quad ((p \vee q) \leftrightarrow (\neg s))$$

Observação

Mas não podemos eliminar parênteses demais.

Por exemplo, não podemos escrever

$$p \wedge q \rightarrow r \quad , \quad p \vee q \leftrightarrow \neg s$$

A primeira é conjunção ou implicação?

A segunda é disjunção ou bi-implicação?

Problema da compatibilidade da simbolização na LC

Dadas
Uma sentença S da Linguagem Natural e uma fórmula φ de LC.

Questão
Decidir se φ é uma simbolização de S.

Não vamos tratar deste importantíssimo problema de maneira direta.
Sua resolução está além do escopo da Lógica Formal.

Quando for o caso, vamos tentar analisar a sentença, usando o bom senso e as Tabelas de Avaliação.

LC vai à praia

Fiquei bronzeado pois fui à praia.

$$\begin{array}{lll} b & : & \textit{Eu fiquei bronzeado.} \\ p & : & \textit{Eu fui à praia.} \end{array}$$

$$p \rightarrow b$$

$$p \wedge b$$

$$p \wedge (p \rightarrow b)$$

Quais estão corretas?

LC vai à praia

Fiquei bronzeado pois fui à praia.

$$\begin{array}{lcl} b & : & \textit{Eu fiquei bronzeado.} \\ p & : & \textit{Eu fui à praia.} \end{array}$$

Vamos usar o nosso bom senso, examinando os possíveis valores que φ pode assumir em suas interpretações.

p	b	φ
V	V	?
V	F	?
F	V	?
F	F	?

LC vai à praia

Fiquei bronzeado pois fui à praia.

$$\begin{array}{lcl} b & : & \textit{Eu fiquei bronzeado.} \\ p & : & \textit{Eu fui à praia.} \end{array}$$

p	b		φ
V	V	Eu fui à praia e eu fiquei bronzeado.	V
V	F	Eu fui à praia e eu não fiquei bronzeado.	F
F	V	Eu fui não à praia e eu fiquei bronzeado.	F
F	F	Eu fui não à praia e eu não fiquei bronzeado.	F

LC vai à praia

Para simbolizar

$$\psi \text{ pois } \theta$$

o bom senso aliado a tabela de avaliação manda escolher o e:

$$\theta \text{ e } \psi$$

Assim, o bom senso e as tabelas garantem que a resposta correta é

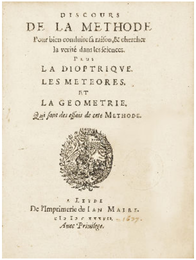
$$p \wedge b$$

e, neste caso, o problema está resolvido.

Mas, como Descarte já dizia . . .

> Le bon sens est la chose du monde la mieux partagée; car chacun pense en être si bien pourvu, que ceux même qui sont les plus difficiles à contenter en toute autre chose n'ont point coutume d'en désirer plus qu'ils en ont.

Descartes (1596–1650)



Discours de la Méthode (1637)

Exercício 1

Usando o seu bom senso e a Tabela do ou exclusivo, $\oplus$:

φ	ψ	$\varphi \oplus \psi$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

explique por que a “fórmula”

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

pode ser aceita como uma “simbolização” de $\varphi \oplus \psi$ em LC.

Parte 2

Equivalência semântica

Problema da Sinonímia na LC

Dadas

Duas fórmulas φ e ψ de LC.

Questão

Decidir se φ e ψ expressam o mesmo conteúdo.

Em LC esta questão só faz sentido se, por "expressar o mesmo conteúdo" queremos dizer:

> *Elas podem ser formadas de maneira diferente a partir de sentenças atômicas por meio dos conectivos lógicos, mas devem assumir os mesmos valores nas mesmas interpretações.*

Linguagem Natural $\times$ Lógica

Em LC, esperamos que:

$$\neg(\neg\varphi)$$

expresse o mesmo conteúdo que

$$\varphi.$$

Na Língua Portuguesa, não queremos que:

Não, você não pode colar na prova.

expresse o mesmo conteúdo que

Você pode colar na prova.

Equivalência semântica

Sejam $\varphi, \psi \in$ FLC.

Uma interpretação para φ e ψ é uma interpretação para $SS[\varphi] \cup SS[\psi]$, ou seja, para todos os símbolos para sentenças que ocorrem em φ ou ψ.

Pelo Teorema da Concordância, uma interpretação I para φ e ψ determina valores para ambas φ e ψ.

Dizemos que φ e ψ são semanticamente equivalentes em LC ou, simplesmente, equivalentes, se, para cada interpretação I para φ e ψ, temos que φ e ψ assumem os mesmos valores em I.

Escrevemos	no lugar de
$\varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi$	φ e ψ são equivalentes

Problema da Equivalência Semântica na LC

Dadas
Duas fórmulas φ e ψ de LC.

Questão
Decidir se $\varphi \models\!\!\!\!=\!\!\!\mid \psi$.

Veremos agora um algoritmo para decidir o Problema da Equivalência Semântica na LC.

Ou seja, vamos elaborar um procedimento para resolver o problema que, quando executado sobre um par de fórmulas da LC, termina a execução e responde corretamente a pergunta "estas fórmulas são equivalentes?"

Parte 3

Tabelas para equivalências

Tabelas para equivalência

Queremos um algoritmo para, dadas duas fórmulas, classificá-las como equivalentes ou não.

Podemos adaptar as tabelas de avaliação para resolver este problema.

Basta construirmos uma tabela conjunta, listando todas as interpretações para φ e ψ, e compararmos os valores de φ e ψ em cada interpretação.

Exemplo 1

$$p \;\models\!\!\!\dashv\; \neg\neg p \quad ?$$

Construindo uma tabela conjunta:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
V	F	V
F	V	F
$\Uparrow$		$\Uparrow$

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Exemplo 2

Baseados no nosso bom senso, concluímos que, dada a legenda

$$\begin{array}{lcl} b & : & \textit{Eu fiquei bronzeado.} \\ p & : & \textit{Eu fui à praia.} \end{array}$$

a sentença

Fiquei bronzeado pois fui à praia.

deve ser simbolizada como

$$p \wedge b.$$

Antes disso, consideramos duas outras possibilidades:

$$p \to b$$

e

$$p \wedge (p \to b).$$

Exemplo 2

Podemos, agora, construir uma tabela conjunta:

p	b	$p \rightarrow b$	$p \wedge b$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F
		$\Uparrow$	$\Uparrow$

E concluir que a primeira não faz sentido.

Como as fórmulas possuem valores diferentes em ao menos uma interpretação, elas não são equivalentes.

Exemplo 2

Mas, e a segunda?

$$p \wedge (p \rightarrow b) \models\!\!\dashv p \wedge b \quad ?$$

Construindo uma tabela conjunta:

p	b	$p \rightarrow b$	$p \wedge (p \rightarrow b)$	$p \wedge b$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F
			$\Uparrow$	$\Uparrow$

Vemos que a segunda faz sentido:

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Exemplo 3

Simbolizar a sentença:

Meu primo é flamenguista ou tricolor.

Legenda:

p : Meu primo é flamenguista.
q : Meu primo é tricolor.

Observando, simplesmente que a sentença é uma disjunção, podemos simbolizá-la como:

$$p \vee q$$

Exemplo 3

Mas, esta fórmula tem como tabela:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

na qual $p : V$ e $q : V$ fornecem $p \vee q : V$.

De acordo com o sentido da sentença, obviamente, meu primo não pode ser simultaneamente flamenguista e tricolor .

Exemplo 3

Queremos uma fórmula φ que tenha como tabela:

p	q	φ
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

na qual $p : V$ e $q : V$ fornecem $p \vee q : F$ e as outras três interpretações coincidem com a tabela do **ou**.

Ou seja, buscamos por uma simbolização que expresse o **ou exclusivo**.

Exemplo 3

Como já vimos, algumas candidatas são:

(1) $\varphi : (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ se examinamos mais detalhadamente o significado da sentença.

(2) $\psi : (p \wedge \neg q) \vee [(\neg p) \wedge q]$ se examinamos as linhas da tabela, nas quais a sentença é V.

(3) $\theta : \neg(p \leftrightarrow q)$ se examinamos a última coluna da tabela e a comparamos com a tabela do **se, e somente se**.

(4) $\gamma : \neg(p \wedge q) \wedge \neg[(\neg p) \wedge \neg q]$ se examinamos as linhas da tabela, nas quais a sentença é F.

Exemplo 3

Suspeitamos que todas estão corretas.

E a tabela conjunta confirma a nossa suspeita:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	φ	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	$(\neg p) \wedge q$
V	V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F	F
					$\Uparrow$				

ψ	$p \leftrightarrow q$	θ	$\neg(p \wedge q)$	$\neg[(\neg p) \wedge \neg q]$	γ
F	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
$\Uparrow$		$\Uparrow$			$\Uparrow$

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Observação

Podemos usar colchetes, chaves, ângulos (e outros símbolos), para ajudar na leitura da estrutura da fórmula.

Por exemplo, ao invés de

$$((p \vee ((\neg q) \wedge r)) \rightarrow ((\neg s) \leftrightarrow t))$$

podemos escrever

$$\langle\{p \vee [(\neg q) \wedge r]\} \rightarrow [(\neg s) \leftrightarrow t]\rangle.$$

Método das Tabelas para Equivalência

Sejam $\varphi, \psi \in FLC$, tais que $VS[\varphi] \cup VS[\psi] = \{s_1, \ldots, s_m\}$.

A determinação da equivalência de φ e ψ pode ser feita mediante a execução do seguinte algoritmo, que constroi a *tabela conjunta* de φ e ψ:

1. Em uma *linha de referência*, escreva as variáveis para sentença $s_1, \ldots, s_m$.

2. Abaixo da linha de referência, escreva, como usual, todas as interpretações para $\{s_1, \ldots, s_m\}$.

Método das Tabelas para equivalência

3. Utilizando as tabelas dos conectivos, calcule "de baixo para cima" todos os valores das subfórmulas de φ, até obter o valor de φ.

4 Utilizando as tabelas dos conectivos, calcule "de baixo para cima" todos os valores das subfórmulas de ψ que ainda não foram calculados, até obter o valor de ψ.

5. Compare a coluna rotulada com φ com a coluna rotulada com ψ. Se elas são iguais, $\varphi \models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv \psi$. Caso contrário, φ e ψ não são equivalentes.

Exercício 1

Simbolize as seguintes sentenças em LC.
Se você encontrar mais de uma opção, verifique se elas são equivalentes, ou não.

(i) *Se chover mas eu ficar em casa, eu não vou me molhar.*

(ii) *Eu vou me molhar quando chover, se eu não ficar em casa.*

(iii) *Se chover e a ida ao cinema não for cancelada, eu não vou ficar em casa.*

(iv) *Cancelada ou não a ida ao cinema, eu vou ficar em casa caso chova.*

(v) *Se chover, eu vou ficar em casa, se não, não.*

Exercício 2

Verifique se as seguintes sentenças são equivalentes:

(i) *Não é o caso que este triângulo é retângulo e ao mesmo tempo obtusângulo.*

e

Este triângulo é retângulo e, portanto, não é obtusângulo.

(ii) *Não é o caso que: x é primo se, e somente se, x é ímpar.*

e

x é primo ou ímpar.

(iii) *s é perpendicular a t segue de: r é paralela a s e perpendicular a t.*

e

r é paralela a s e s não é perpendicular a t acarreta em r não é perpendicular a t.

Exercício 2

(iv) *Se r é perpendicular a s e s é perpendicular a t, então r é perpendicular a t.*

e

Se r não é perpendicular a s e s não é perpendicular a t, então r não é perpendicular a t.

(v) *Se x é par e primo, então x é diferente de 2.*

e

Se $x = 2$, então x nem é par nem primo.

Parte 4

Principais equivalências

Lógica e álgebra

Dentre todos os pares de fórmulas equivalentes, alguns podem ser vistos como expressando propriedades algébricas dos conectivos, como associatividade, comutatividade, etc.

Por exemplo, $\varphi \models\!\mid \neg(\neg\varphi)$ corresponde a $x = -(-x)$.

Assim como o entendimento das propriedades algébricas das operações aritméticas é essencial para que façamos um bom uso delas, o entendimento das propriedades algébricas dos conectivos também é fundamental.

Principais equivalências lógicas

Em tudo o que segue, φ, ψ e θ são fórmulas quaisquer de LC.

Cada equivalência abaixo é um *esquema* expressando infinitas equivalências, cada uma obtida pela substituição de φ, ψ e θ por fórmulas específicas de LC.

Propriedades do $\neg$

$$\neg\neg\varphi \models\!\!\!\!\dashv \varphi$$

Intuitivamente, $\neg\varphi$ é F sse φ é V.

Corresponde a $-(-x) = x$.

Dizemos que $\neg$ é **involutivo**.

Propriedades do $\neg$

$$\neg(\varphi \land \psi) \models\!\!\!\Dashv \neg\varphi \lor \neg\psi$$

Intuitivamente, $\varphi \land \psi$ é F sse φ é F ou ψ é F.

Não tem correspondente algébrico.

Dizemos que $\neg$ "transforma" conjunções em disjunções.

Propriedades do $\neg$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \models\mathrel{\mkern-4mu}\dashv \neg\varphi \wedge \neg\psi$$

Intuitivamente, $\varphi \vee \psi$ é F sse φ é F e ψ é F.

Não tem correspondente algébrico.

Dizemos que $\neg$ "transforma" disjunções em conjunções.

Propriedades do $\neg$

$$\neg(\varphi \to \psi) \models\!\!\!\!= \varphi \wedge \neg\psi$$

Intuitivamente, $\varphi \to \psi$ é F sse φ é V e ψ é F.

Não tem correspondente algébrico.

Dizemos que $\neg$ "transforma" implicações em conjunções.

Propriedades do $\neg$

$$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \models\!\!\!\dashv (\varphi \land \neg\psi) \lor (\neg\varphi \land \psi)$$

Intuitivamente, $\varphi \leftrightarrow \psi$ é F sse φ e ψ têm valores opostos.

Não tem correspondente algébrico.

Dizemos que $\neg$ “transforma” bi-implicações em disjunções.

Propriedades do $\neg$

A negação da bi-implicação possui mais duas equivalências interessantes e úteis:

$$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \mathrel{|}\!\!\!\equiv\!\!\!\mathrel{|} \neg\varphi \leftrightarrow \psi$$

e

$$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \mathrel{|}\!\!\!\equiv\!\!\!\mathrel{|} \varphi \leftrightarrow \neg\psi.$$

Intuitivamente, $\varphi \leftrightarrow \psi$ é F sse φ e ψ têm valores opostos.

Propriedades do $\wedge$

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \models\mid (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$$

Intuitivamente, conjunções de mais de duas fórmulas podem ser lidas em qualquer ordem de precedência.

Corresponde a $x(yz) = (xy)z$.

Dizemos que $\wedge$ é **associativo**.

Propriedades do $\wedge$

$$\varphi \wedge \psi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \psi \wedge \varphi$$

Intuitivamente, conjunções podem ser lidas em qualquer ordem.

Corresponde a $xy = yx$.

Dizemos que $\wedge$ é **comutativo**.

Propriedades do $\wedge$

$$\varphi \wedge \varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi$$

Intuitivamente, conjunções com componentes repetidos podem ser simplificadas.

Não tem correspondente algébrico.

Dizemos que $\wedge$ é **idempotente**.

Propriedades do $\wedge$

$$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$$

Corresponde a $x(y+z) = xy + xz$.

Dizemos que $\wedge$ **distribui sobre** $\vee$.

Propriedades do $\wedge$

Como esta última equivalência não é tão intuitiva, vamos verificá-la pelo Método das Tabelas:

φ	ψ	θ	$\psi \vee \theta$	$\varphi \wedge (\psi \vee \theta)$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \wedge \theta$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*
V	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
				$\Uparrow$			$\Uparrow$

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Propriedades do $\wedge$

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \models\!\!\dashv \varphi$$

Não tem um sentido intuitivo muito claro.

Não tem correspondente algébrico.

Dizemos que $\wedge$ **absorve** $\vee$.

Propriedades do $\wedge$

Como esta última equivalência não é tão intuitiva, vamos verificá-la pelo Método das Tabelas:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F
$\Uparrow$			$\Uparrow$

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Propriedades do $\wedge$

Se $\top$ é uma fórmula verdadeira em todas as interpretações, então:

$$\varphi \wedge \top \models\mid \varphi$$

Intuitivamente, fórmulas sempre verdadeiras não afetam o valor de conjunções.

Corresponde a $x1 = x$.

Dizemos que qualquer fórmula sempre verdadeira é um **elemento neutro** do $\wedge$.

Propriedades do $\vee$

$$(\varphi \vee \psi) \vee \theta \mathrel{|}\!\!\!\equiv\!\!\!\mathrel{|} \varphi \vee (\psi \vee \theta)$$

Intuitivamente, disjunções de mais de duas fórmulas podem ser lidas em qualquer ordem de precedência.

Corresponde a $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Dizemos que $\vee$ **é associativo**.

Propriedades do $\vee$

$$\varphi \vee \psi \models\!\!\!\dashv \psi \vee \varphi$$

Intuitivamente, disjunções podem ser lidas em qualquer ordem.

Corresponde a $x + y = y + x$.

Dizemos que $\vee$ é **comutativo**.

Propriedades do $\vee$

$$\varphi \vee \varphi \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi$$

Intuitivamente, disjunções com componentes repetidos podem ser simplificadas.

Não tem correspondente algébrico.

Dizemos que $\vee$ é **idempotente**.

Propriedades do $\vee$

$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \models\mid (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$$

O correspondente algébrico seria $x + (yz) = (x + y)(x + z)$, o qual nem sempre é verdadeiro.

Dizemos que $\vee$ **distribui sobre** $\wedge$.

Propriedades do $\vee$

Como esta última equivalência não é tão intuitiva, vamos verificá-la pelo Método das Tabelas:

φ	ψ	θ	$\psi \wedge \theta$	$\varphi \vee (\psi \wedge \theta)$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \vee \theta$	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
F	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
F	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
				$\Uparrow$			$\Uparrow$

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Propriedades do $\vee$

$$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \mathrel{|}\!\!\!=\!\!\!\mathrel{|} \varphi$$

Não tem um sentido intuitivo muito claro.

Não tem correspondente algébrico.

Dizemos que $\vee$ **absorve** $\wedge$.

Propriedades do $\vee$

Como esta última equivalência não é tão intuitiva, vamos verificá-la pelo Método das Tabelas:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$
V	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*F*
$\Uparrow$			$\Uparrow$

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Propriedades do $\vee$

Se $\perp$ é uma fórmula falsa em todas as interpretações, então:

$$\varphi \vee \perp \mathrel{|\!\!\!=\!\!\!|} \varphi$$

Intuitivamente, fórmulas que são sempre falsas não afetam o valor de disjunções.

Corresponde a $x + 0 = x$.

Dizemos que qualquer fórmula sempre falsa é um **elemento neutro** do $\vee$.

Dualidade

Observe a dualidade existente entre as equivalências sobre o $\wedge$ e as equivalências sobre o $\vee$: elas ocorrem em pares.

$$
\begin{array}{cc}
\neg(\varphi \wedge \psi) \models\mid \neg\varphi \vee \neg\psi & \neg(\varphi \vee \psi) \models\mid \neg\varphi \wedge \neg\psi \\
\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \models\mid (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta & \varphi \vee (\psi \vee \theta) \models\mid (\varphi \vee \psi) \vee \theta \\
\varphi \wedge \psi \models\mid \psi \wedge \varphi & \varphi \vee \psi \models\mid \psi \vee \varphi \\
\varphi \wedge \varphi \models\mid \varphi & \varphi \vee \varphi \models\mid \varphi \\
\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \models\mid (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta) & \varphi \vee (\psi \wedge \theta) \models\mid (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta) \\
\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \models\mid \varphi & \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \models\mid \varphi \\
\varphi \wedge \top \models\mid \varphi & \varphi \vee \bot \models\mid \varphi
\end{array}
$$

Em cada par, cada uma delas pode ser transformada na outra pela substituição de $\wedge$ por $\vee$ e vice-versa; e de $\top$ por $\bot$ e vice-versa.

Eliminação do $\rightarrow$

$$\varphi \rightarrow \psi \models\!\!\!\dashv \neg\varphi \vee \psi$$

Intuitivamente, uma implicação é V quando o antecedente é F ou o consequente é V.

Dizemos que uma implicação pode ser reescrita como uma disjunção.

Eliminação do $\leftrightarrow$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \models\mid (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

Intuitivamente, uma bi-implicação é V quando ambos os componentes são V ou ambos os componentes são F.

Dizemos que uma bi-implicação pode ser reescrita como uma disjunção.

Eliminação do $\leftrightarrow$

Outra maneira de eliminar o $\leftrightarrow$ decorre da ideia de que $\varphi \leftrightarrow \psi$ significa duas implicações conjuntas:

$$\varphi \leftrightarrow \psi \models\!\mid (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$$

Uma tabela mostra que esta ideia está correta:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\varphi \to \psi$	$\psi \to \varphi$	$(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)$
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*
F	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
		$\Uparrow$			$\Uparrow$

Como as fórmulas possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações, elas são equivalentes.

Conjuntos completos de conectivos

Manipulando as equivalências básicas, podemos chegar a conclusões interessantes:

$$\varphi \vee \psi \models\mid \neg\neg\varphi \vee \neg\neg\psi \models\mid \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\varphi \to \psi \models\mid \neg\varphi \vee \psi \models\mid \neg\varphi \vee \neg\neg\psi \models\mid \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \models\mid (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \models\mid \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\psi \wedge \neg\varphi)$$

Observe que podemos "expressar" todos os conectivos lógicos usando apenas os conectivos $\neg$ e $\wedge$.

Conjuntos completos de conectivos

Seja C um conjunto de conectivos lógicos.

Dizemos que C é **completo** se todos os conectivos lógicos podem ser "expressos" por meio de conectivos em C.

Por exemplo, o conjunto $\{\neg, \wedge\}$ é completo.

Exercício 3

Mostre que os seguintes conjuntos de conectivos são completos:

(i) $\{\neg, \vee\}$

(ii) $\{\neg, \rightarrow\}$

Exercício 4

Explique por que os seguintes conjuntos de conectivos não são completos:

(i) $\{\wedge, \vee\}$

(ii) $\{\wedge, \rightarrow\}$

(iii) $\{\vee, \rightarrow\}$

(iv) $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$

(v) $\{\neg, \leftrightarrow\}$

Observação: Um único raciocínio simples justifica (i), (ii), (iii) e (iv). Já (v), exige mais pensamento ...

Parte 5

Exercícios

Mais exercícios!

Lista de Exercícios – Aula 4a

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Determine se são equivalentes:

1. $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \wedge \neg q$
2. $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \vee \neg q$
3. $\neg(p \rightarrow q)$ e $\neg p \rightarrow \neg q$
4. $p \rightarrow (q \wedge r)$ e $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
5. $p \rightarrow (q \vee r)$ e $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
6. $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$ e $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

Exercício 2 Considere a seguinte sentença:

Eu vou à praia, a não ser que eu vá ao cinema. (1)

1. Qual das seguintes fórmulas pode ser uma simbolização de (1)?

   (i) $p \rightarrow c$ (ii) $c \rightarrow p$ (iii) $c \rightarrow \neg p$ (iv) $\neg p \rightarrow c$

   Justifique a sua escolha.

2. Mostre que as fórmulas $p \rightarrow c$, $c \rightarrow p$, $c \rightarrow \neg p$ e $\neg p \rightarrow c$ são duas-a-duas não equivalentes. Assim, conclua que, dentre as opções acima, existe uma única escolha acertada.

Exercício 3 Considere a seguinte sentença:

Quando estou triste, eu não gosto de assistir dramas, mas comédias. (2)

1. Qual das seguintes fórmulas pode ser uma simbolização de (2)?

   (i) $t \rightarrow (d \wedge c)$ (ii) $t \rightarrow (\neg d \wedge c)$ (iii) $d \rightarrow (t \wedge \neg c)$ (iv) $\neg d \rightarrow (t \wedge c)$

Simplificação e negação por meio de equivalências na Lógica dos Conectivos

Petrucio Viana & Renata de Freitas

GAN–IME–UFF

21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Equivalência e substituição

Equivalência e substituição

Assim como as propriedades algébricas são usadas para calcularmos com e simplificarmos as expressões algébricas, vamos ver agora que as equivalências lógicas também podem ser usadas para calcularmos com e simplificarmos as fórmulas de LC.

Já fizemos uso deste procedimento, quando manipulamos as equivalências para obter conjuntos completos de conectivos.

Equivalência e substituição

Sabemos que fórmulas equivalentes possuem os mesmos valores nas mesmas interpretações.
Assim, podem ser re-escritas uma no lugar da outra, quando necessário.

Definição. Sejam $\varphi, \psi, \theta \in FLC$.

Denotamos por

$$[\psi|\varphi]\theta$$

qualquer fórmula obtida a partir de θ pela substituição simultânea de zero ou mais ocorrências de φ como subfórmula de θ por ψ.

Equivalência e substituição

Teorema da Substituição. Para todas $\varphi, \psi, \theta \in FLC$, se $\varphi \models\mid \psi$, então:

$$\theta \models\mid [\psi|\varphi]\theta$$

.

Ou seja, se substituímos simultaneamente zero ou mais ocorrências de uma subfórmula de uma fórmula por uma fórmula equivalente a ela, a fórmula resultante é equivalente à fórmula original.

Equivalência e substituição

A principal consequência do Teorema da Substituição é que podemos "transformar" uma fórmula em outra por meio da substituição de uma subfórmula por uma fórmula equivalente a ela.

Por exemplo, como $\varphi \models\mid \neg\neg\varphi$ e $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \models\mid \varphi \wedge \psi$, podemos transformar

$$(\neg\neg p) \wedge [(\neg\neg p) \to \neg\neg\neg q]$$

em

$$p \wedge (p \to \neg q)$$

e esta última em

$$p \wedge \neg q.$$

Transformação por meio de equivalências

Podemos, agora, mostrar que dois enunciados são equivalentes, aplicando a propriedade acima em conjunto com as equivalências básicas, para "transformar" passo-a-passo um enunciado no outro.

Como uma regra, por este procedimento, buscamos sempre obter enunciados mais "simples" que o enunciado original.

Exemplo 4

$p \wedge (p \rightarrow q) \models\mid p \wedge q$

$$p \wedge (p \rightarrow q)$$

$$\models\mid$$

$$p \wedge (\neg p \vee q)$$

$$\models\mid$$

$$(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$$

$$\models\mid$$

$$p \wedge q$$

As equivalências usadas foram, respectivamente: Definição do $\rightarrow$, Distributividade do $\wedge$ sobre o $\vee$, Elemento neutro do $\vee$.

Exemplo 5

$p \rightarrow (p \wedge q) \models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv \neg p \vee q$

$$p \rightarrow (p \wedge q)$$
$$\models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv$$
$$\neg p \vee (p \wedge q)$$
$$\models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv$$
$$(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$$
$$\models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv$$
$$\neg p \vee q$$
$$\models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv$$
$$p \rightarrow q$$

As equivalências usadas foram, respectivamente: Definição do $\rightarrow$, Distributividade do $\vee$ sobre o $\wedge$, Elemento neutro do $\wedge$, Definição do $\rightarrow$.

Exemplo 6

$(p \wedge q) \rightarrow r \mathrel{|}\!\!\Longleftrightarrow\!\!\mathrel{|} p \rightarrow (q \rightarrow r)$

$$
\begin{array}{c}
(p \wedge q) \rightarrow r \\
\mathrel{|}\!\!\!=\!\!=\!\!\!\mathrel{|} \\
\neg(p \wedge q) \vee r \\
\mathrel{|}\!\!\!=\!\!=\!\!\!\mathrel{|} \\
(\neg p \vee \neg q) \vee r \\
\mathrel{|}\!\!\!=\!\!=\!\!\!\mathrel{|} \\
\neg p \vee (\neg q \vee r) \\
\mathrel{|}\!\!\!=\!\!=\!\!\!\mathrel{|} \\
\neg p \vee (q \rightarrow r) \\
\mathrel{|}\!\!\!=\!\!=\!\!\!\mathrel{|} \\
p \rightarrow (q \rightarrow r)
\end{array}
$$

As equivalências usadas foram, respectivamente: Definição do $\rightarrow$, Lei de De Morgan, Definição do $\rightarrow$, Definição do $\rightarrow$.

Exemplo 7

$\{[(p \wedge q) \wedge r] \vee [\neg p \wedge (q \wedge r)]\} \vee [p \wedge (\neg q \wedge r)] \models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv (p \vee q) \wedge r$

$$\{[(p \wedge q) \wedge r] \vee [\neg p \wedge (q \wedge r)]\} \vee [p \wedge (\neg q \wedge r)]$$
$$\models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv$$
$$\{[p \wedge (q \wedge r)] \vee [\neg p \wedge (q \wedge r)]\} \vee [p \wedge (\neg q \wedge r)]$$
$$\models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv$$
$$[(p \vee \neg p) \wedge (q \wedge r)] \vee [p \wedge (\neg q \wedge r)]$$
$$\models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv$$
$$(q \wedge r) \vee [p \wedge (\neg q \wedge r)]$$
$$\models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv$$
$$(q \wedge r) \vee [(p \wedge \neg q) \wedge r]$$
$$\models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv$$
$$[q \vee (p \wedge \neg q)] \wedge r$$
$$\models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv$$
$$(q \vee p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge r$$
$$\models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv$$
$$(q \vee p) \wedge r$$
$$\models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv$$
$$(p \vee q) \wedge r$$

Exercício 1

Determine as equivalências básicas que foram usadas em cada passo, na simplificação acima.

Observação

Dependendo de como examinamos uma fórmula, há mais de uma maneira de transformá-la em uma fórmula equivalente.

Além disso, procedendo apenas por tentativa e erro, não podemos garantir que vamos, realmente, obter uma fórmula mais "simples" que a fórmula original.

Assim, da maneira que está apresentado acima, o Método da Substituição de Equivalentes não é um algoritmo, mas um procedimento.

Finalmente, da maneira que está apresentado acima — ou seja, transformando um enunciado no outro por meio de equivalências —, o Método da Substituição de Equivalentes não pode ser aplicado para mostrarmos que dois enunciados não são equivalentes.

Simplificação de sentenças

Problemas de simplificação

Dada uma informação confusa, é usual queremos reescrevê-la de forma mais clara.

Problema da Simplificação: Dada uma sentença, encontrar uma sentença equivalente a ela que seja mais clara, informativa, enxuta, simples, etc.

Para resolver este problema, para sentenças que só possuem ocorrências de conectivos, podemos aplicar a simbolização e utilizar a tabela de avaliação da sentença.

Vejamos um exemplo ...

O segredo da longevidade

Ao ser perguntado sobre o segredo da longevidade, um ancião disse:

É só seguir uma dieta estrita.
Se eu não bebo cerveja no jantar, eu sempre como peixe.
Quando eu bebo cerveja e como peixe no jantar, eu não tomo sorvete.
Além disso, se eu tomo sorvete ou não bebo cerveja, eu nunca como peixe.

Podemos simplificar esta explicação confusa, de modo a entender o que o ancião realmente quis dizer?

Legenda e simbolização

O primeiro passo é definir uma legenda:

$$
\begin{array}{lcl}
c & : & \textit{Eu bebo cerveja no jantar.} \\
p & : & \textit{Eu como peixe no jantar.} \\
s & : & \textit{Eu tomo sorvete no jantar.}
\end{array}
$$

O segundo passo é simbolizar os enunciados de acordo com a legenda definida:

$$
\begin{array}{l}
\neg c \rightarrow p \\
(c \wedge p) \rightarrow \neg s \\
(s \vee \neg c) \rightarrow \neg p
\end{array}
$$

Tabela de avalição

O que foi dito pelo ancião corresponde à conjunção das fórmulas:

$$(\neg c \rightarrow p) \wedge [(c \wedge p) \rightarrow \neg s] \wedge [(s \vee \neg c) \rightarrow \neg p]$$

Esta conjunção possui a seguinte tabela (confira esta informação):

c	p	s	$(\neg c \rightarrow p) \wedge [(c \wedge p) \rightarrow \neg s] \wedge [(s \vee \neg c) \rightarrow \neg p]$
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

Simplificação 1

O que podemos concluir a partir desta tabela?

Olhando apenas para as interpretações nas quais a conjunção é V, temos:

$$(c \wedge p \wedge \neg s) \vee (c \wedge \neg p \wedge s) \vee (c \wedge \neg p \wedge \neg s)$$

Como usual, não escrevemos parênteses em conjunções e disjunções iteradas.

Alternativamente, a conjunção pode ser simplificada diretamente do modo a seguir.

Como usual, não explicitamos as aplicações nem da Associatividade do $\vee$, nem da Associatividade do $\wedge$.

Simplificação 2

$$(\neg c \to p) \land [(c \land p) \to \neg s] \land [(s \lor \neg c) \to \neg p]$$

$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv$ (Definição do $\to$)

$$(\neg\neg c \lor p) \land [\neg(c \land p) \lor \neg s] \land [\neg(s \lor \neg c) \lor \neg p]$$

$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv$ (Negação do $\neg$)

$$(c \lor p) \land [\neg(c \land p) \lor \neg s] \land [\neg(s \lor \neg c) \lor \neg p]$$

$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv$ (Leis de De Morgan)

$$(c \lor p) \land (\neg c \lor \neg p \lor \neg s) \land [(\neg s \land \neg\neg c) \lor \neg p]$$

Simplificação 3

$$(c \vee p) \wedge (\neg c \vee \neg p \vee \neg s) \wedge [(\neg s \wedge \neg\neg c) \vee \neg p]$$

$\models\!\!\!\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv$ (Negação do $\neg$)

$$(c \vee p) \wedge (\neg c \vee \neg p \vee \neg s) \wedge [(\neg s \wedge c) \vee \neg p]$$

$\models\!\!\!\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv$ (Comutatividade do $\vee$)

$$(c \vee p) \wedge (\neg c \vee \neg p \vee \neg s) \wedge [\neg p \vee (\neg s \wedge c)]$$

$\models\!\!\!\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv$ (Distributividade do $\vee$ sobre o $\wedge$)

$$(c \vee p) \wedge (\neg c \vee \neg p \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee c)$$

Simplificação 4

$$(c \vee p) \wedge (\neg c \vee \neg p \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee c)$$

Observe que a disjunção $\neg c \vee \neg p \vee \neg s$ (segundo componente) contém a disjunção $\neg p \vee \neg s$ (terceiro componente) como componente.

$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!\dashv$ (Absorção do $\vee$ pelo $\wedge$)

$$(c \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge (c \vee \neg p)$$

Simplificação 5

$$(c \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge (c \vee \neg p)$$

Observe que várias aplicações da distributividade $(a + b)c = ac + bc$ nos permite passar de

$$(a + b)(c + d)(e + f)$$

para

$$(ace) + (acf) + (ade) + (adf) + (bce) + (bcf) + (bde) + (bdf).$$

De maneira análoga:

$$\models\!\!\!\dashv \text{ (Distributividade do } \wedge \text{ sobre o } \vee \text{ diversas vezes)}$$

$$\begin{array}{lclcl}
(c \wedge \neg p \wedge c) & \vee & (c \wedge \neg p \wedge \neg p) & \vee \\
(c \wedge \neg s \wedge c) & \vee & (c \wedge \neg s \wedge \neg p) & \vee \\
(p \wedge \neg p \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p \wedge \neg p) & \vee \\
(p \wedge \neg s \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg s \wedge \neg p) &
\end{array}$$

Simplificação 6

$$
\begin{array}{lll}
(c \wedge \neg p \wedge c) & \vee & (c \wedge \neg p \wedge \neg p) \quad \vee \\
(c \wedge \neg s \wedge c) & \vee & (c \wedge \neg s \wedge \neg p) \quad \vee \\
(p \wedge \neg p \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p \wedge \neg p) \quad \vee \\
(p \wedge \neg s \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg s \wedge \neg p)
\end{array}
$$

$$\models\mid \text{(Comutatividade do } \wedge\text{)}$$

$$
\begin{array}{lll}
(c \wedge c \wedge \neg p) & \vee & (c \wedge \neg p \wedge \neg p) \quad \vee \\
(c \wedge c \wedge \neg s) & \vee & (c \wedge \neg s \wedge \neg p) \quad \vee \\
(p \wedge \neg p \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p \wedge \neg p) \quad \vee \\
(p \wedge \neg s \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p \wedge \neg s)
\end{array}
$$

Simplificação 7

$$
\begin{array}{llll}
(c \wedge c \wedge \neg p) & \vee & (c \wedge \neg p \wedge \neg p) & \vee \\
(c \wedge c \wedge \neg s) & \vee & (c \wedge \neg s \wedge \neg p) & \vee \\
(p \wedge \neg p \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p \wedge \neg p) & \vee \\
(p \wedge \neg s \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p \wedge \neg s) &
\end{array}
$$

$$\mathrel{|}\!\!\equiv\!\!\mathrel{|} \text{(Idempotência do } \wedge\text{)}$$

$$
\begin{array}{llll}
(c \wedge \neg p) & \vee & (c \wedge \neg p) & \vee \\
(c \wedge \neg s) & \vee & (c \wedge \neg p \wedge \neg s) & \vee \\
(p \wedge \neg p \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p) & \vee \\
(p \wedge \neg s \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p \wedge \neg s) &
\end{array}
$$

Simplificação 8

$$
\begin{array}{llll}
(c \wedge \neg p) & \vee & (c \wedge \neg p) & \vee \\
(c \wedge \neg s) & \vee & (c \wedge \neg p \wedge \neg s) & \vee \\
(p \wedge \neg p \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p) & \vee \\
(p \wedge \neg s \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p \wedge \neg s) &
\end{array}
$$

$\models\!\!\!\!=\!\!\!\dashv$ (Idempotência do $\vee$)

$$
\begin{array}{llll}
(c \wedge \neg p) & \vee & & \\
(c \wedge \neg s) & \vee & (c \wedge \neg p \wedge \neg s) & \vee \\
(p \wedge \neg p \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p) & \vee \\
(p \wedge \neg s \wedge c) & \vee & (p \wedge \neg p \wedge \neg s) &
\end{array}
$$

$\models\!\!\!\!=\!\!\!\dashv$ (Elemento Neutro do $\vee$)

$$
\begin{array}{llll}
(c \wedge \neg p) & \vee & & \\
(c \wedge \neg s) & \vee & (c \wedge \neg s \wedge \neg p) & \vee \\
(p \wedge \neg s \wedge c) & & &
\end{array}
$$

Simplificação 9

$$\begin{array}{lll} (c \land \neg p) & \lor & \\ (c \land \neg s) & \lor & (c \land \neg s \land \neg p) \quad \lor \\ (p \land \neg s \land c) & & \end{array}$$

Preparando para aplicação da Absorção do $\land$ pelo $\lor$.

$$\models\!\!\!\!\!\!\dashv \text{(Comutatividade do } \land)$$

$$\begin{array}{lll} (c \land \neg p) & \lor & \\ (c \land \neg s) & \lor & (c \land \neg p \land \neg s) \quad \lor \\ (c \land \neg s \land p) & & \end{array}$$

Preparando para aplicação da Absorção do $\land$ pelo $\lor$.

$$\models\!\!\!\!\!\!\dashv \text{(Comutatividade do } \lor)$$

$$(c \land \neg p) \lor (c \land \neg p \land \neg s) \lor (c \land \neg s) \lor (c \land \neg s \land p)$$

Simplificação 10

$$(c \wedge \neg p) \vee (c \wedge \neg p \wedge \neg s) \vee (c \wedge \neg s) \vee (c \wedge \neg s \wedge p)$$

A conjunção $c \wedge \neg p \wedge \neg s$ (segundo componente) contém a conjunção $c \wedge \neg p$ (primeiro componente) como componente.

A conjunção $c \wedge \neg s \wedge p$ (quarto componente) contém a conjunção $c \wedge \neg s$ (terceiro componente) como componente.

$$\models\!\dashv \text{ (Absorção do } \wedge \text{ pelo } \vee\text{)}$$

$$(c \wedge \neg p) \vee (c \wedge \neg s)$$

Chegamos, então a uma informação mais simples do que a que obtivemos a partir da tabela de avaliação!

O segredo da longevidade!

$$(c \wedge \neg p) \vee (c \wedge \neg s)$$

Concluímos que o que ancião queria dizer é:

Eu bebo cerveja e não como peixe,
ou
eu bebo cerveja e não tomo sorvete.

Parece, então, que o segredo da longevidade é a cerveja!

Exercício 2

Mostre que as seguintes sentenças são equivalentes, usando sequências de equivalências:

(i) $\neg\neg[\neg(p \vee \neg q)]$ e $\neg p \wedge q$.

(ii) $\neg(p \wedge q)$ e $q \rightarrow \neg p$.

(iii) $\neg[(p \vee q) \wedge r]$ e $(\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$.

(iv) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ e $q \rightarrow (p \rightarrow r)$.

(v) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ e $\neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$.

(vi) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$ e $\neg p \vee p$.

Exercício 2

(vii) $\neg[p \to (q \wedge r)]$ e $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$.

(viii) $\neg[(p \wedge q) \wedge r]$ e $p \to (q \to \neg r)$.

(ix) $\neg(p \leftrightarrow q)$ e $p \leftrightarrow \neg q$.

(x) $\neg p \leftrightarrow q$ e $p \leftrightarrow \neg q$.

(xi) $\neg(\neg p \leftrightarrow q)$ e $p \leftrightarrow q$.

Parte 2

Negação de sentenças

Problemas de negação

Dada uma informação, muitas vezes, queremos dizer, de forma clara, o oposto do que ela diz.

Problema da Negação: Dada uma negação, encontrar uma sentença equivalente a ela que seja mais clara, informativa, enxuta, simples, etc.

Para resolver este tipo de problema, podemos aplicar tabelas de avalição, mas nós preferimos as sequências de equivalências.

Negação da negação

A tabela de $\neg(\neg\varphi)$ é:

φ	$\neg\varphi$	$\neg(\neg\varphi)$
V	F	V
F	V	F

Observe que $\varphi \models\!\!\!\!=\!\!\!\dashv \neg(\neg\varphi)$.

Assim, no lugar de $\neg(\neg\varphi)$ podemos escrever φ, e vice-versa.

Negação da negação

Determinar a negação de:

2 não é ímpar.

Legenda:

$i \quad : \quad 2$ *é ímpar.*

Simbolização:

$$\neg i$$

Negação da negação

Negação:

$$\neg\neg i$$

$$\models\!\!\!\!\!\dashv$$

$$i$$

Reescrita:

2 *é ímpar.*

Negação da implicação

A tabela de $\neg(\varphi \to \psi)$ é:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\neg(\varphi \to \psi)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

Observe que, $\neg(\varphi \to \psi) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \varphi \wedge \neg\psi$.

Assim, no lugar de $\neg(\varphi \to \psi)$ podemos escrever $\varphi \wedge \neg\psi$, e vice-versa.

Negação da implicação

Determinar a negação de

Se x não é par, então x^2 também não é par.

Legenda:

$$\begin{array}{lcl} p & : & x \textit{ é par.} \\ q & : & x^2 \textit{ é par.} \end{array}$$

Simbolização:

$$\neg p \rightarrow \neg q$$

Negação da implicação

Negação:

$$\neg(\neg p \to \neg q)$$

$$\models\mid$$

$$\neg p \wedge \neg\neg q$$

$$\models\mid$$

$$\neg p \wedge q$$

Reescrita:

x não é par e x^2 é par.

Negação da disjunção

A tabela de $\neg(\varphi \vee \psi)$ é:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Observe que $\neg(\varphi \vee \psi) \models\!\!\!=\!\!\!\dashv \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

Assim, no lugar de $\neg(\varphi \vee \psi)$ podemos escrever $(\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$, e vice-versa.

Negação da disjunção

Determinar a negação de

F não é um quadrado ou: se F é, então G não é.

Legenda:

$$\begin{array}{lcl} f & : & \textit{F é um quadrado.} \\ g & : & \textit{G é um quadrado.} \end{array}$$

Simbolização:

$$\neg f \vee (f \rightarrow \neg g)$$

Negação da disjunção

Negação:

$$\neg\left[\neg f \vee (f \to \neg g)\right]$$

$$\models\!\!\!\!\dashv$$

$$\neg\neg f \wedge \neg(f \to \neg g)$$

$$\models\!\!\!\!\dashv$$

$$\neg\neg f \wedge f \wedge \neg\neg g$$

$$\models\!\!\!\!\dashv$$

$$f \wedge f \wedge g$$

$$\models\!\!\!\!\dashv$$

$$f \wedge g$$

Reescrita:

F é um quadrado e G é um quadrado.

Observação

Temos tendência a aplicar as regras de negação “de cima para baixo”.

Por exemplo, de $\neg(\neg p \vee \neg q)$ obtemos $p \wedge q$.

Mas como elas são equivalências, elas também podem ser aplicadas “de baixo para cima”.

Por exemplo, de $p \wedge q$ obtemos $p \wedge \neg\neg q$ e, daí, obtemos $\neg(p \to \neg q)$.

Exemplo útil

$$\neg\varphi \vee \psi$$

$$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!|$$

$$\neg\varphi \vee \neg\neg\psi$$

$$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!|$$

$$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!|$$

$$\neg\neg(\varphi \to \psi)$$

$$\models\!\!\!\!=\!\!\!\!|$$

$$\varphi \to \psi$$

Assim, no lugar de $\neg\varphi \vee \psi$ podemos escrever $\varphi \to \psi$, e vice-versa.

Negação da conjunção

A tabela de $\neg(\varphi \wedge \psi)$ é:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Observe que, $\neg(\varphi \wedge \psi) \models\!\!\!=\!\!\!\dashv \neg\varphi \vee \neg\psi$.

Assim, no lugar de $\neg(\varphi \wedge \psi)$ podemos escrever $\neg\varphi \vee \neg\psi$, e vice-versa.

Negação da conjunção

Isso também pode ser visto do seguinte modo:

$$\neg(\varphi \wedge \psi)$$

$$\mathrel{|}\!\!\!=\!\!\!=\!\!\!\mathrel{|}$$

$$\neg(\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$$

$$\mathrel{|}\!\!\!=\!\!\!=\!\!\!\mathrel{|}$$

$$\neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\mathrel{|}\!\!\!=\!\!\!=\!\!\!\mathrel{|}$$

$$\neg\varphi \vee \neg\psi$$

Negação da conjunção

Determinar a negação de

Laura foi à feira, o tomate estava caro e, por isso, ela não comprou tomate

Legenda:

l : *Laura foi à feira.*
t : *o tomate estava caro.*
c : *Laura comprou tomate.*

Simbolização ao pé da letra:

$$(l \wedge t) \wedge [(l \wedge t) \rightarrow \neg c]$$

Negação da disjunção

Negação:

$$\neg\left\{(l \wedge t) \wedge [(l \wedge t) \to \neg c]\right\}$$
$$\models\mid$$
$$\neg(l \wedge t) \vee \neg\left[(l \wedge t) \to \neg c\right]$$
$$\models\mid$$
$$\neg(l \wedge t) \vee [(l \wedge t) \wedge \neg\neg c]$$
$$\models\mid$$
$$\neg(l \wedge t) \vee [(l \wedge t) \wedge c]$$
$$\models\mid$$
$$[\neg(l \wedge t) \vee (l \wedge t)] \wedge [\neg(l \wedge t) \vee c]$$
$$\models\mid$$
$$\neg(l \wedge t) \vee c$$
$$\models\mid$$
$$(l \wedge t) \to c$$

Reescrita:

Se Laura foi à feira e o tomate estava caro, então Laura comprou tomate

Negação da bi-implicação

A tabela de $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	V	F

Observe que $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \models\!\!\!\!= (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$.

Assim, no lugar de $\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$ podemos escrever $(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$, e vice-versa.

Negação da bi-implicação

Determinar a negação de

> *x é primo se, e somente se,* $x \neq 0$, $x \neq 1$ *e x não possui fatores próprios.*

Legenda:

$$\begin{array}{lcl} p & : & x \text{ é primo.} \\ z & : & x = 0. \\ u & : & x = 1. \\ f & : & x \text{ possui fatores próprios.} \end{array}$$

Simbolização:

$$p \leftrightarrow (\neg z \wedge \neg u \wedge \neg f)$$

Negação da bi-implicação

Negação:

$$\neg\,[p \leftrightarrow (\neg z \wedge \neg u \wedge \neg f)]$$
$$\models\!\!\!=\!\!\!\mid$$
$$[p \wedge \neg(\neg z \wedge \neg u \wedge \neg f)] \vee (\neg p \wedge \neg z \wedge \neg u \wedge \neg f)$$
$$\models\!\!\!=\!\!\!\mid$$
$$[p \wedge (\neg\neg z \vee \neg\neg u \vee \neg\neg f)] \vee (\neg p \wedge \neg z \wedge \neg u \wedge \neg f)$$
$$\models\!\!\!=\!\!\!\mid$$
$$[p \wedge (z \vee u \vee f)] \vee (\neg p \wedge \neg z \wedge \neg u \wedge \neg f)$$
$$\models\!\!\!=\!\!\!\mid$$
$$(p \wedge z) \vee (p \wedge u) \vee (p \wedge f) \vee (\neg p \wedge \neg z \wedge \neg u \wedge \neg f)$$

Reescrita:

(x é primo e $x = 0$) ou (x é primo e $x = 1$) ou (x é primo e x possui fatores próprios) ou (x não é primo e $x \neq 0$ e $x \neq 1$ e x não possui fatores próprios).

Negação da bi-implicação

Outra maneira de obter a negação da bi-implicação:

$$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$$

$$\models\!\!\!=\!\!\!|$$

$$\neg\left[(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)\right]$$

$$\models\!\!\!=\!\!\!|$$

$$\neg(\varphi \to \psi) \vee \neg(\psi \to \varphi)$$

$$\models\!\!\!=\!\!\!|$$

$$(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \wedge \neg\varphi)$$

$$\models\!\!\!=\!\!\!|$$

$$(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$$

Negação de sentenças

Em resumo, temos o seguinte:

1. Negar uma sentença é reescrever a sua negação de uma maneira mais informativa.

2. Esta reescrita pode ser feita de maneira sistemática, pelo uso de enunciados equivalentes.

3. As equivalências mais úteis para este fim, são as seguintes:

$$\begin{array}{lcl}
\neg(\neg\varphi) & \models\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\models\!\!\!\!\!\dashv & \varphi \\
\neg(\varphi \wedge \psi) & \models\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\models\!\!\!\!\!\dashv & (\neg\varphi) \vee (\neg\psi) \\
\neg(\varphi \vee \psi) & \models\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\models\!\!\!\!\!\dashv & (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi) \\
\neg(\varphi \rightarrow \psi) & \models\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\models\!\!\!\!\!\dashv & \varphi \wedge (\neg\psi) \\
\neg(\varphi \leftrightarrow \psi) & \models\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\models\!\!\!\!\!\dashv & [\varphi \wedge (\neg\psi)] \vee [(\neg\varphi) \wedge \psi]
\end{array}$$

Exercício 3

Determine a negação de cada sentença:

(i) *Não é o caso que* $1 + 2 > \pi$.

(ii) *x é irracional.*

(iii) $2 + 1 = 3$ *e* $2 - 1 \neq 1$.

(iv) *ABC é retângulo e DEF é isósceles.*

(v) *x é par ou x é primo.*

Exercício 3

(vi) $x < y$ *ou* x *não é positivo.*

(vii) *Se* $\mathbb{N}$ *é infinito, então* $\mathbb{Z}$ *não é finito.*

(viii) *Se* A *é finito, então* $P(A) > 1$.

(ix) 2 *é par se, e somente se,* 2^2 *é ímpar.*

(x) ABC *é um triângulo se, e somente se,* $\overline{AX}$ *e* $\overline{BY}$ *são colineares.*

Exercícios

Mais exercícios!

Lista de Exercícios – Aula 7

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Determine a negação de:

> Não é o caso que o Todo Poderoso seja onisciente e onipresente; a não ser que o Todo Poderoso tenha poderes limitados ou não seja benevolente.

Exercício 2 Em um concurso para Dezembargador(a) — emprego no qual você pode chegar a ganhar R$140.000,00 mensais — pedia-se que o candidato determinasse uma sentença equivalente à negação de:

> Eu não dirijo quando tomo bebida alcoólica e bebo acima do permitido.

Dois candidatos que estavam fazendo o concurso, responderam à questão, da maneira a seguir.

O primeiro respondeu:

> Eu tomo bebida alcoólica, mas não é o caso que se eu bebo acima do permitido, eu não dirijo.

O segundo respondeu:

> Não é o caso que se eu tomo bebida alcoólica, eu não bebo acima do permitido; e, além disso, eu dirijo.

1. O primeiro está certo? Justifique.
2. O segundo está certo? Justifique.

Exercício 3 Considere a sentença:

> Se o Flamengo ou o Fluminense ganhar e não der empate entre Vasco e Botafogo, então eu ganho o bolão e compro a bicicleta, mas não o skate.

1. Determine a sua negação.
2. Supondo que a negação da sentença é V, é possível determinar o resultado do jogo entre Vasco e Botafogo?

Consequência Semântica na Lógica dos Conectivos

Petrucio Viana & Renata de Freitas

IME, UFF

21 de março de 2023

Sumário

Equivalências e suas metades

Não-equivalências simples 1

Considere a seguinte questão:

$$\varphi \wedge \psi \models\!\!\!\dashv \varphi \vee \psi \text{ ?}$$

Já sabemos que a resposta para esta questão é: não!

Mas, examinemos a questão um pouco mais a fundo ...

Não-equivalências simples 1

Examinando a tabela conjunta de $\varphi \wedge \psi$ e $\varphi \vee \psi$, temos:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$
V	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*F*	*V*
F	*F*	*F*	*F*
		$\Uparrow$	$\Uparrow$

Agora, observe na tabela que:

1. Não existe interpretação na qual $\varphi \wedge \psi$ é *V* e $\varphi \vee \psi$ é *F*.
2. Existe interpretação na qual $\varphi \vee \psi$ é *V* e $\varphi \wedge \psi$ é *F*.

Não-equivalências simples 1

Neste sentido, podemos dizer que a equivalência questionada — entre $\varphi \land \psi$ e $\varphi \lor \psi$ — não "fura" de $\varphi \land \psi$ para $\varphi \lor \psi$, mas "fura" de $\varphi \lor \psi$ para $\varphi \land \psi$.

Em outras palavras, podemos dizer que entre $\varphi \land \psi$ e $\varphi \lor \psi$ não há equivalência, mas há, ainda, "metade da equivalência": aquela que vai de $\varphi \land \psi$ para $\varphi \lor \psi$.

Não-equivalências simples 2

Considere, agora, a questão:

$$\varphi \to \psi \models\!\!\!\!\dashv \varphi \leftrightarrow \psi \text{ ?}$$

Já sabemos que a resposta para esta questão é: não!

Novamente, examinemos a questão um pouco mais a fundo . . .

Não-equivalências simples 2

Examinando a tabela conjunta de $\varphi \to \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi$, temos:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V
		$\Uparrow$	$\Uparrow$

Agora, observe na tabela que:

1. Não existe interpretação na qual $\varphi \leftrightarrow \psi$ é V e $\varphi \to \psi$ é F.
2. Existe interpretação na qual $\varphi \to \psi$ é V e $\varphi \leftrightarrow \psi$ é F.

Não-equivalências simples 2

Neste sentido, podemos dizer que a equivalência questionada — entre $\varphi \to \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi$ — não "fura" de $\varphi \leftrightarrow \psi$ para $\varphi \to \psi$, mas "fura" de $\varphi \to \psi$ para $\varphi \leftrightarrow \psi$.

Em outras palavras, podemos dizer que entre $\varphi \to \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi$ não há equivalência, mas há, ainda, "metade da equivalência""aquela que vai de $\varphi \leftrightarrow \psi$ para $\varphi \to \psi$.

Não-equivalências simples 3

Finalmente, considere, a questão:

$$\varphi \vee \psi \mathrel{|\!\!=\!\!|} \varphi \leftrightarrow \psi \text{ ?}$$

Já sabemos que a resposta para esta questão é: não!

Novamente, examinemos a questão um pouco mais a fundo ...

Não-equivalências simples 3

Examinando a tabela conjunta de $\varphi \vee \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi$, temos:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
V	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*V*	*F*
F	*V*	*V*	*F*
F	*F*	*F*	*V*
		$\Uparrow$	$\Uparrow$

Agora, observe na tabela que:

1. Existe interpretação na qual $\varphi \vee \psi$ é *V* e $\varphi \leftrightarrow \psi$ é *F*.
2. Existe interpretação na qual $\varphi \leftrightarrow \psi$ é *V* e $\varphi \vee \psi$ é *F*.

Não-equivalências simples 3

Neste sentido, podemos dizer que a equivalência questionada — entre $\varphi \to \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi$ — "fura" de $\varphi \leftrightarrow \psi$ para $\varphi \to \psi$, também, "fura" de $\varphi \to \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi$.

Em outras palavras, podemos dizer que entre $\varphi \to \psi$ e $\varphi \leftrightarrow \psi$ não há equivalência e não há, também, nenhuma "metade da equivalência".

Metade da equivalência

Em conclusão, existem três razões para que não possamos transformar uma fórmula φ em outra fórmula ψ por meio de uma equivalência:

1. Podemos "descer" de φ para ψ, mas não podemos "subir" de ψ para φ.

2. Podemos "subir" de ψ para φ, mas não podemos "descer" de φ para ψ.

3. Não podemos nem "descer" de φ para ψ, nem "subir" de ψ para φ.

Um erro de cálculo

Assim, se apresentamos a sequência:

$$\neg p \rightarrow (p \wedge r)$$
$$\models\mid$$
$$p \vee (p \wedge r)$$
$$\models\mid$$
$$p \vee (p \vee r)$$
$$\models\mid$$
$$p \vee p \vee r$$
$$\models\mid$$
$$p \vee r$$

cometemos um erro no terceiro passo, já que a passagem de $p \vee (p \wedge r)$ para $p \vee (p \vee r)$ não é baseada em uma equivalência.

Um erro de cálculo

Desta maneira, não podemos concluir que $\neg p \to (p \wedge r)$ e $p \vee r$ "dizem a mesma coisa".

Porém, observamos que:

1. Não existe interpretação na qual $p \vee (p \wedge r)$ é V e $p \vee (p \vee r)$ é F.
2. Mas existe interpretação na qual $p \vee (p \vee r)$ é V e $p \vee (p \wedge r)$ é F.

De fato, para 1, se supomos $p \vee (p \wedge r) : V$, temos $p : V$ e $p \wedge r : V$, o que nos dá $p : V$ e $r : V$. Assim, $p \vee (p \vee r) : V$.

Um erro de cálculo

Para 2, basta tomarmos $p : F$ e $r : V$ pois, daí, $p \vee r : V$ e $p \vee (p \vee r) : V$. Enquanto que $p \wedge r : F$ e $p \vee (p \wedge r) : F$.

Assim, podemos dizer que o único erro está na “subida” de $p \vee (p \vee r)$ para $p \vee (p \wedge r)$.

Mas não na “descida”'”de $p \vee (p \wedge r)$ para $p \vee (p \vee r)$.

“Metades” da equivalência

Sendo assim, podemos dizer que a sequênvia:

$$\neg p \rightarrow (p \wedge r)$$

$$\models\mid$$

$$p \vee (p \wedge r)$$

$$\models\mid$$

$$p \vee (p \vee r)$$

$$\models\mid$$

$$p \vee p \vee r$$

$$\models\mid$$

$$p \vee r$$

assegura que a partir da fórmula $\neg p \rightarrow (p \wedge r)$ “podemos garantir” a fórmula $p \vee r$, mas não assegura que elas são equivalentes.

“Metades” da equivalência

Em resumo, sejam φ e ψ duas fórmulas da LC.

Para que φ e ψ sejam equivalentes, elas devem ter os mesmos valores nas mesmas interpretações (linhas da Tabela Conjunta de φ e ψ).

Ou seja, toda vez que φ é V, ψ deve ser V.
E toda vez que ψ é V, φ deve ser V.

Neste caso, podemos passar de φ para ψ e, vice-versa, de ψ para φ.

“Metades” da equivalência

Mas há situações em que φ e ψ não são equivalentes, pois existem interpretações (linhas da Tabela Conjunta de φ e ψ) nas quais φ é V, mas ψ é F.

Porém, em alguns casos (mas não todos) ainda temos “metade da equivalência”, ou seja não existem interpretações nas quais ψ é V, mas φ é F.

Neste caso, não podemos passar de φ para ψ, mas podemos passar de ψ para φ, obtendo assim uma fórmula a partir da outra, sem obter uma equivalência.

Parte 2

Consequência semântica na LC

Consequência semântica

Tudo do que dissemos anteriormente é formalizado na seguinte definição.

Definição. Sejam $\varphi, \psi \in$ FLC.

Dizemos que ψ é uma **consequência semântica** de φ se não existem interpretações conjuntas para φ e ψ nas quais $\varphi : V$ e $\psi : F$.

Ou seja, se toda interpretação conjunta para φ e ψ que torna φ verdadeira também torna ψ verdadeira.

Consequência semântica

Notação.

$\varphi \models \psi$: φ é consequência semântica de ψ

$\varphi \not\models \psi$: φ não é consequência semântica de ψ

Nas não equivalências simples 1, 2 e 3, acima, temos:

$$\varphi \wedge \psi \models \varphi \vee \psi \quad \text{mas} \quad \varphi \vee \psi \not\models \varphi \wedge \psi$$

$$\varphi \rightarrow \psi \not\models \varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{mas} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \models \varphi \rightarrow \psi$$

$$\varphi \vee \psi \not\models \varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{e} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \not\models \varphi \vee \psi$$

Consequência semântica é metade da equivalência

Teorema. Para todas $\varphi, \psi \in$ FLC, se $\varphi \models\!\!\!=\!\!\!| \ \psi$, então $\varphi \models \psi$.

A justificativa é bastante simples.

Sejam $\varphi, \psi \in$ FLC.

Suponhamos que $\varphi \models\!\!\!=\!\!\!| \ \psi$.

Daí, φ e ψ possuem os mesmos valores em cada interpretação conjunta.

Assim, não existem interpretações conjuntas para φ e ψ nas quais φ : *V* e ψ : *F*.

Consequência semântica

Toda equivalência semântica, $\varphi \models\mathrel{|} \psi$, acarreta duas consequências semânticas: $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \varphi$.

Mas, os casos novos interessantes são aqueles em que não temos equivalência, mas só uma das metades da equivalência.

Exercício 1

Verificar se:

(a) $p \wedge q \models p \rightarrow q$.

(b) $p \rightarrow q \models p \wedge q$.

(c) $p \wedge q \models p \leftrightarrow q$.

(d) $p \leftrightarrow q \models p \wedge q$.

(e) $p \vee q \models p \leftrightarrow q$.

(f) $p \leftrightarrow q \models p \vee q$.

Problema da Consequência Semântica

Problema da Consequência Semântica

Dadas: Duas fórmulas φ e ψ da LC.

Questão: Decidir se $\varphi \models \psi$ ou não.

Quando estamos diante de uma instância

$$\varphi \models \psi \text{ ?}$$

do Problema da Consequência Semântica, dizemos que φ é a premissa e que ψ é a conclusão.

Quando a resposta é positiva, dizemos que a premissa acarreta a conclusão, que a conclusão decorre da premissa, etc.

Observação

As expressões

$$\varphi \to \psi$$

e

$$\varphi \models \psi$$

são sintaticamente diferentes.

As razões principais desta diferença são:

1. $\varphi \to \psi$ é uma única fórmula (uma implicação) da LC, enquanto que $\varphi \models \psi$ enuncia uma relação (de consequência semântica) entre duas fórmulas da LC.

2. $\varphi \to \psi$ possui um antecedente e um consequente, enquanto que $\varphi \models \psi$ possui uma premissa e uma conclusão.

Observação

Apesar de serem sintaticamente diferentes, as expressões

$$\varphi \to \psi$$

e

$$\varphi \models \psi$$

são semanticamente semelhantes.

A razões principais desta semelhança são:

1. $\varphi \to \psi$ representa uma noção informal de causa e efeito entre o antecedente e o consequente, enquanto que $\varphi \models \psi$ representa uma noção formal de consequência entre a premissa e a conclusão.

Observação

2. Afirmar que $\varphi \models \psi$

   é o mesmo que afirmar que

   em todas as interpretações para φ e ψ nas quais a premissa φ é V, a conclusão ψ também é V

   é o mesmo que afirmar que

   não existem interpretações para φ e ψ nas quais a premissa φ é V, a conclusão ψ é F

   é o mesmo que afirmar que

   na última coluna da tabela de avaliação da implicação $\varphi \rightarrow \psi$ ocorre somente V.

Ou seja, existe uma relação direta entre o significado de $\varphi \models \psi$ e a tabela de avaliação de $\varphi \rightarrow \psi$.

Problema da Consequência Semântica

Para qualquer sistema lógico que possui uma noção de "fórmula verdadeira em uma interpretação", o Problema da Consequência Semântica é o problema central.

Nestes casos, grande parte do desenvolvimento do sistema é a busca por um procedimento ou algoritmo que resolva o Problema da Consequência Semântica para aquele sistema.

Veremos agora que para a LC, a Observação 2, sobre a semântica da relação $\models$, se traduz em um algoritmo — baseado na construção de uma tabela de avaliação — para a solução do Problema da Consequência Semântica.

Parte 3

Método das Tabelas para Consequência

Consequência semântica e tabelas de avaliação

Baseados na Observação 2, sobre a semântica da relação $\models$, podemos adaptar as tabelas de avaliação para obter um método que resolve o Problema da Consequência Semântica em LC.

Dadas φ e $\psi \in FLC$, para decidir se $\varphi \models \psi$ basta construírmos e examinarmos a tabela de avalição de $\varphi \to \psi$, conforme os exemplos a seguir.

Exemplo 1

$p \wedge q \models p$?

Temos que verificar se a implicação $(p \wedge q) \to p$ é V em todas as suas interpretações.

A tabela de $p \wedge q \to p$ é:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

$p \wedge q \models p$ pois na última coluna da tabela de $(p \wedge q) \to p$ ocorre somente V.

Exemplo 2

$p \lor q \models p$?

Temos que verificar se a implicação $(p \lor q) \to p$ é V em todas as suas interpretações.

A tabela de $(p \lor q) \to p$ é:

p	q	$p \lor q$	$(p \lor q) \to p$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	V

Exemplo 2

$p \lor q \models p$?

Temos que verificar se a implicação $(p \lor q) \rightarrow p$ é V em todas as suas interpretações.

A tabela de $(p \lor q) \rightarrow p$ é:

p	q	$p \lor q$	$(p \lor q) \rightarrow p$	
V	V	V	V	
V	F	V	V	
F	V	V	F	$\Leftarrow$
F	F	F	V	

$p \lor q \not\models p$ pois existe uma interpretação na qual $(p \lor q) \rightarrow p$ é F.

Exemplo 3

$(p \vee q) \wedge \neg p \models q$?

Temos que verificar se a implicação $\varphi : [(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$ é V em todas as suas interpretações.

A tabela de $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$ é:

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	φ
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

$(p \vee q) \wedge \neg p \models q$ pois na última coluna da tabela de $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$ ocorre somente V.

Parte 4

Paradoxos da consequência semântica

Paradoxos da consequência semântica

Veremos, agora, que a relação $\models$ possui um comportamento semântico excêntrico, similar ao do conectivo $\rightarrow$.

Este comportamento é externado nos Paradoxos da Consequência Semântica, que correspondem aos Paradoxos da Implicação Material.

E são claramente elucidados através da propriedade "$\varphi \models \psi$ se, e somente se $\varphi \rightarrow \psi$ é verdadeira em todas as suas interpretações".

Exemplo 4

$p \wedge q \wedge \neg p \models q$?

Temos que verificar se a implicação $\varphi : (p \wedge q \wedge \neg p) \rightarrow q$ é V em todas as suas interpretações.

A tabela de $\varphi : (p \wedge q \wedge \neg p) \rightarrow q$ é:

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$p \wedge q \wedge \neg p$	φ
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	F	V

$p \wedge q \wedge \neg p \models q$, pois não existe interpretação I tal que $(p \wedge q \wedge \neg p) \rightarrow q$ é F em I.

Exemplo 5

$p \models q \vee \neg q$?

Temos que verificar se a implicação $p \rightarrow (q \vee \neg q)$ é V em todas as suas interpretações.

A tabela de $p \rightarrow (q \vee \neg q)$ é:

p	q	$q \vee \neg q$	$p \rightarrow (q \vee \neg q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

$p \models q \vee (\neg q)$, pois para toda interpretação I, $p \rightarrow (q \vee \neg q)$ é V em I.

Paradoxos da consequência semântica 1

Paradoxo da Premissa

Para todas $\varphi, \psi \in$ FLC, se φ é F em todas as interpretações, então $\varphi \models \psi$.

A justificativa é bastante simples.

Sejam $\varphi, \psi \in$ FLC.

Suponhamos que $\varphi : F$ em todas as interpretações.

Daí, não existe interpretação na qual $\varphi : V$.

Logo, não existem interpretações conjuntas para φ e ψ nas quais $\varphi : V$ e $\psi : F$.

Paradoxos da consequência semântica

Paradoxo da Conclusão

Para todas $\varphi, \psi \in$ FLC, se ψ é V em todas as interpretações, então $\varphi \models \psi$.

A justificativa é bastante simples.

Sejam $\varphi, \psi \in$ FLC.

Suponhamos que $\psi : V$ em todas as interpretações.

Daí, não existe interpretação na qual $\psi : F$.

Logo, não existem interpretações conjuntas para φ e ψ nas quais $\varphi : V$ e $\psi : F$.

Parte 4

Exercícios

Exercício 2

Verificar se:

(i) $\neg(p \to q) \models \neg p \to \neg q$.

(ii) $\neg p \to \neg q \models \neg(p \to q)$.

(iii) $p \land (q \to r) \models (p \land q) \to (p \land r)$.

(iv) $(p \land q) \to (p \land r) \models p \land (q \to r)$.

(v) $p \land (q \leftrightarrow r) \models (p \land q) \leftrightarrow (p \land r)$.

Exercício 2

(vi) $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r) \models p \wedge (q \leftrightarrow r)$.

(vii) $p \vee (q \rightarrow r) \models (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$.

(viii) $(p \vee q) \rightarrow (p \vee r) \models p \vee (q \rightarrow r)$.

(ix) $p \vee (q \leftrightarrow r) \models (p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$.

(x) $(p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r) \models p \vee (q \leftrightarrow r)$.

Mais exercícios!

Lista de Exercícios – Aula 8

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Para cada item abaixo:
(1) decida indutivamente se a afirmação é, ou não, uma consequência semântica;
(2) utilize o Método das Tabelas para Consequência para verificar se a sua decisão está correta.

1. $\neg(p \wedge q) \models p \rightarrow q$
2. $\neg(p \wedge q) \models q \rightarrow p$
3. $\neg(p \wedge q) \models p \leftrightarrow q$
4. $\neg(p \vee q) \models p \rightarrow q$
5. $\neg(p \vee q) \models q \rightarrow p$
6. $\neg(p \vee q) \models p \leftrightarrow q$
7. $\neg(p \rightarrow q) \models p \wedge q$
8. $\neg(p \rightarrow q) \models p \vee q$
9. $\neg(q \rightarrow p) \models p \wedge q$
10. $\neg(q \rightarrow p) \models p \vee q$
11. $\neg(p \leftrightarrow q) \models p \wedge q$
12. $\neg(p \leftrightarrow q) \models p \vee q$

Consequência semântica finitária na Lógica dos Conectivos

Petrucio Viana & Renata de Freitas

IME, UFF
21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Consequência semântica finitária em LC

Consequência semântica finitária

Todas as ideias, noções, técnicas e resultados relacionadas a consequência semântica em LC se estendem naturalmente para situações em que há mais de uma premissa envolvida.

Desde que haja apenas um número finito de premissas envolvidas.

Exemplo 1

$t \to x, \neg x \models \neg t$?

Devemos investigar se em toda interpretação para $\{t, x\}$ na qual $t \to x : V$ e $\neg x : V$, também temos $\neg t : V$.

Isto é o mesmo que investigar se em toda interpretação para $\{t, x\}$ na qual $(t \to x) \wedge \neg x : V$, também temos $\neg t : V$.

Isto é o mesmo que investigar se em toda interpretação para $\{t, x\}$ temos $[(t \to x) \wedge \neg x] \to \neg t : V$.

Exemplo 1

Implicação associada:

$$\varphi : [(t \to x) \land \neg x] \to \neg t$$

Tabela:

t	x	$\neg t$	$\neg x$	$t \to x$	$(t \to x) \land \neg x$	φ
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

A conclusão decorre das premissas, pois na última coluna da tabela só ocorre V.

Exemplo 2

$\neg d \to \neg c, \neg c \models \neg d$?

Devemos investigar se em toda interpretação para $\{d, c\}$ na qual $\neg d \to \neg c : V$ e $\neg c : V$, também temos $\neg d : V$.

Isto é o mesmo que investigar se em toda interpretação para $\{d, c\}$ na qual $(\neg d \to \neg c) \wedge \neg c : V$, também temos $\neg d : V$.

Isto é o mesmo que investigar se em toda interpretação para $\{d, c\}$ temos $[(\neg d) \to \neg c) \wedge \neg c] \to \neg d : V$.

Exemplo 2

Implicação associada:

$$\varphi : [((\neg d) \to \neg c) \wedge \neg c] \to \neg d$$

Tabela:

d	c	$\neg d$	$\neg c$	$(\neg d) \to \neg c$	$((\neg d) \to \neg c) \wedge \neg c$	φ
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

A conclusão não decorre das premissas, pois tomando $d : V$ e $c : F$ temos premissas V e conclusão F.

Exemplo 3

$f \vee \neg a, a \models f$?

Implicação associada:

$$\varphi : [(f \vee \neg a) \wedge a] \rightarrow f$$

Tabela:

f	a	$\neg a$	$f \vee \neg a$	$(f \vee \neg a) \wedge a$	φ
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V

A conclusão decorre das premissas, pois na última coluna da tabela só ocorre V.

Exemplo 4

$d \to t, t \to q \models q$?

Implicação associada:

$$\varphi : [(d \to t) \land (t \to q)] \to q$$

Exemplo 4

Tabela:

d	t	q	$d \to t$	$t \to q$	$(d \to t) \wedge (t \to q)$	φ
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F

A conclusão não decorre das premissas, pois tomando $d : F$, $t : F$ e $q : F$ temos premissas V e conclusão F.

Exemplo 5

$c \to m, m \to d, c \models d$?

Implicação associada:

$$\varphi : [(c \to m) \wedge (m \to d) \wedge c] \to d$$

Como o $\wedge$ é associativo, não precisamos escrever parênteses no antecedente.

Exemplo 5

Tabela:

c	m	d	$\overbrace{c \to m}^{\psi_1}$	$\overbrace{m \to d}^{\psi_2}$	$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge c$	φ
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

A conclusão decorre das premissas, pois na última coluna da tabela só ocorre V.

Interpretação para um conjunto finito

Tanto o problema quanto o método para resolvê-lo, ilustrados nos exemplos acima, são formalizados nos conceitos e técnicas apresentados a seguir.

Definição. Seja $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi\} \subseteq \text{FLC}$ um conjunto finito.

Uma **interpretação** para $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi$ é uma interpretação para $SS[\varphi_1] \cup SS[\varphi_2] \cup \ldots \cup SS[\varphi_n] \cup SS[\psi]$.

Ou seja, uma interpretação $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi$ é uma atribuição de valores a todos os símbolos para sentenças que ocorrem em $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi$.

Consequência semântica finitária

Definição. Seja $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi\} \subseteq$ FLC um conjunto finito.

Dizemos que ψ é uma **consequência semântica finitária de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ em LC** se:

> Para toda interpretação I para $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi$,
> se $\varphi_1 : V$, $\varphi_2 : V$, $\ldots$, $\varphi_n : V$ em I,
> então $\psi : V$ em I.

Ou seja, ψ é uma consequência semântica finitária de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ se toda interpretação que torna as premissas φ_1, φ_2, ..., φ_n simultaneamente verdadeiras também torna a conclusão ψ verdadeira.

Consequência semântica finitária

Usualmente, escrevemos apenas

ψ é consequência semântica de φ_1, φ_2, ..., φ_n em LC,

ou seja, deixamos a palavra "finitária" subentendida.

Notação:

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$: ψ é consequência semântica de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \not\models \psi$: ψ não é consequência semântica de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Consequência semântica finitária

Problema da Consequência Semântica Finitária

Dadas: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in$ FLC.

Questão: Decidir se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$ ou não.

Quando estamos diante de uma instância

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi \text{ ?}$$

do Problema da Consequência Semântica Finitária, dizemos que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ são as premissas e que ψ é a conclusão.

Quando a resposta é positiva, dizemos que as premissas acarretam a conclusão, que a conclusão decorre das premissas, etc.

Método das Tabelas para Consequência Semântica Finitária

Para verificarmos se $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \models \psi$, ou não, basta executarmos o seguinte algoritmo:

1. Construir a **implicação associada**, $\varphi : (\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_m) \rightarrow \psi$.

2. Construir a tabela de φ, $T[\varphi]$.

3. Verificar se na última coluna de $T[\varphi]$ ocorre somente V.

4. Caso a resposta em 3 seja positiva, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \models \psi$;
   caso seja negativa, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \not\models \psi$.

Exercícios

Exercício 1

Utilizando o Método das Tabelas para Consequência Semântica, mostre que:

(i) $p \wedge q, q \wedge r \models p \rightarrow (q \vee r)$

(ii) $p \vee q, q \vee r \not\models p \rightarrow (q \wedge r)$

(iii) $p \rightarrow q, q \rightarrow \neg r \models \neg p \vee \neg r$

(iv) $p \rightarrow q, q \rightarrow \neg r \not\models p \wedge \neg r$

Mais exercícios!

Lista de Exercícios – Aula 9

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Para cada item abaixo:
(1) decida indutivamente se a afirmação é, ou não, uma consequência semântica;
(2) utilize o Método das Tabelas para Consequência para verificar se a sua decisão está correta.

1. $p \to q, p \to r \models p \to (q \wedge r)$
2. $p \to q, p \wedge r \models q \wedge r$
3. $p \to r, q \to s \models (p \vee q) \to (r \vee s)$
4. $(p \wedge q) \to r, p \models q \wedge r$
5. $q \vee r \models q \vee (p \vee r)$
6. $p \wedge (q \vee r) \models (p \to q) \vee r$
7. $q \to r \models (p \vee q) \to (p \vee r)$
8. $\neg p \to q \models (\neg p \to \neg q) \to p$
9. $\neg(p \vee q) \models \neg p$
10. $p \to q \models \neg(p \vee \neg q)$
11. $p \wedge q \models \neg p \to r$
12. $p \to q \models (p \wedge q) \leftrightarrow p$
13. $p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r \models \neg p \leftrightarrow \neg r$
14. $p \wedge \neg q \models \neg p \leftrightarrow q$
15. $p \to q \models p \leftrightarrow (p \wedge q)$
16. $p \to q, p \to r \models p \to (\neg q \leftrightarrow \neg r)$

Passos Lógicos
na Lógica dos Conectivos

Petrucio Viana & Renata de Freitas

IME, UFF

21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Tabelas são inadequadas

Tabelas parecem ser adequadas

O Método das Tabelas para Equivalência e Consequência é:

- simples;
- controlável;
- mecanizável.

Porém, nunca encontramos tabelas nem nas aulas nem nos textos de Matemática.

Tabelas são ineficientes

Uma das razões é que o Método das Tabelas é extremamente ineficiente.

Seguindo o método ao pé da letra, temos que construir tabelas muito grandes para verificar consequências lógicas que são relativamente aparentes.

Exemplo 1

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ s \to t \\ \hline t \end{array}$$

é consequência ou não?

De que tamanho é a tabela que verifica isso: quantas linhas, quantas colunas?

Como você justificaria isto sem usar uma tabela?

Exemplo 1

No total, as fórmulas possuem ocorrências de 5 variáveis.

Uma tabela para a verificação da consequência terá 32 linhas.

Para construir a tabela temos que calcular os valores das subfórmulas:

$$p \rightarrow q, \;\; q \rightarrow r, \;\; r \rightarrow s, \;\; s \rightarrow t$$

A construção da tabela utilizará, no mínimo, 9 colunas.

Tabelas são insuficientes

Já sabemos que se uma fórmula possui n símbolos para sentença, a sua tabela de avaliação possui 2^n linhas.

Assim, se uma fórmula φ possui, por exemplo, 10.000 símbolos para sentenças e se gastamos 1 segundo para escrever cada valor (V ou F), gastamos, no mínimo, $2,7$ horas só para listar todas as interpretações para φ.

Tabelas são insuficientes

Além disso, mesmo as consequências mais simples que ocorrem na Linguagem Matemática possuem ocorrências de partículas que não são conectivos.

É comum o emprego dos quantificadores

para todo , *existe ao menos um*

e até de outras partículas mais complicadas.

Tabelas são insuficientes

Ocorrências de quantificadores podem nos levar a casos envolvendo enunciados tão complexos que a determinação da sua consequeência (ou não) pelo Método das Tabelas não parece ser uma tarefa que possa ser executada mecanicamente.

Zero é um número natural.
Todo número natural tem um sucessor.
O sucessor de um número natural também
é um número natural.
Logo, *existem infinitos números naturais.*

Neste caso, temos a ocorrência de um quantificador fazendo referência a uma quantidade infinita de elementos.

Tabelas são insuficientes

Precisamos, então, encontrar alternativas para o uso de tabelas de avaliação na resolução de problemas que podem ser modelados por meio de fórmulas e cujas questões se reduzem a testar a (equivalência ou) consequência de fórmulas.

Parte 2

Consequência imediata e não imediata

Classificação das consequências

Um primeiro passo para a justificativa de conclusões a partir de premissas, sem o emprego de tabelas, é tentar classificar os problemas de acordo com a dificuldade inerente na determinação das suas consequências (ou não consequências):

1. existem casos cujas consequências (ou não consequências) são fáceis de determinar;

2. existem casos cujas consequências (ou não consequências) não são tão fáceis de determinar.

Exemplo 1

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

A consequência se estabelece.

A consequência é imediata.

Exemplo 1

Justificativa informal:

Se uma conjuncão é V, cada componente é V.

Justificativa formal 1:

Seja I uma interpretação para $\{p, q\}$, na qual $p \wedge q : V$.
Daí, $p : V$ e $q : V$ em I.
Logo, $p : V$ em I.
Assim, em toda interpretação na qual a premissa é V, a conclusão é V.
Logo, é consequência semântica.

Exemplo 1

Justificativa formal 2:

Suponha que não é consequência semântica.
Daí, existe uma interpretação I para $\{p, q\}$, na qual $p \wedge q : V$, mas $p : F$.
Mas, como $p \wedge q : V$, temos $p : V$ e $q : V$.
Assim, temos uma contradição: $p : V$ e $p : F$.
Logo, é consequência semântica.

Seria viável aplicar o Método das Tabelas, pois a tabela teria apenas 4 linhas e 3 colunas.

Exemplo 2

$$\frac{p \vee q}{p}$$

A consequência não se estabelece.

A não consequência é imediata.

Exemplo 2

Justificativa informal:

Uma disjuncão pode ser V, sem que o primeiro componente seja V.

Justificativa formal:

Seja I a interpretação para $\{p, q\}$, na qual $p : F$ e $q : V$.
Neste caso, temos $p \vee q : V$, ou seja, a premissa é V.
Além disso, $p : F$, ou seja, a conclusão é F.
Assim, existe uma interpretação na qual a premissa é V e a conclusão é F.
Logo, não é consequência semântica.

Exemplo 2

Seria viável aplicar o Método das Tabelas, pois a tabela teria apenas 4 linhas e 3 colunas.

Exemplo 3

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}$$

A consequência se estabelece.

A consequência é imediata.

Exemplo 3

Justificativa informal:

Se uma implicacão é V, a "verdade não diminui" quando passamos do antecedente para o consequente, isto é, nunca passamos de V para F.

Justificativa formal 1:

Seja I uma interpretação para $\{p, q\}$, na qual $p : V$ e $p \to q : V$.
Daí, $p : V$ e ($p : F$ ou $q : V$).
Como $p : V$ e ($p : F$ ou $q : V$), temos $q : V$.
Assim, em toda interpretação na qual as premissas são V, a conclusão é V.
Logo, é consequência semântica.

Exemplo 3

Justificativa formal 2:

Suponha que não é consequência semântica.
Daí, existe uma interpretação I para $\{p, q\}$, na qual $p : V$ e $p \rightarrow q : V$, mas $q : F$.
Daí, $p : V$ e ($p : F$ ou $q : V$) e $q : F$.
Como $p : V$ e ($p : F$ ou $q : V$), temos $q : V$.
Assim, temos uma contradição: $q : V$ e $q : F$.
Logo, é consequência semântica.

Seria viável aplicar o Método das Tabelas, pois a tabela teria apenas 4 linhas e 3 colunas.

Exemplo 4

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

A consequência não se estabelece.

A não consequência é imediata.

Exemplo 4

Justificativa informal:

Se o consequente de uma implicacão é V, ela é V independente do valor do antecedente.

Justificativa formal:

Seja I a interpretação para $\{p, q\}$, na qual $p : F$ e $q : V$.
Neste caso, temos $p \rightarrow q : V$ e $q : V$, ou seja, as premissas são V.
Além disso, $p : F$, ou seja, a conclusão é F.
Assim, existe uma interpretação na qual as premissas são V e a conclusão é F.
Logo, não é consequência semântica.

Exemplo 4

Seria viável aplicar o Método das Tabelas, pois a tabela teria apenas 4 linhas e 3 colunas.

Exemplo 5

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \\ \hline p \end{array}$$

A consequência se estabelece.

A consequência é imediata.

Exemplo 5

Justificativa informal:

Se temos duas alternativas e uma delas não acontece, a outra tem que acontecer.

Justificativa formal 1:

Seja I uma interpretação para $\{p, q\}$, *na qual* $p \vee q : V$ *e* $\neg q : V$.
Daí, ($p : V$ *ou* $q : V$) *e* $q : F$.
Ou seja, temos duas alternativas, p *ou* q, *e a segunda delas,* q, *não acontece.*
Daí, $p : V$.
Assim, em toda interpretação na qual as premissas são V, *a conclusão é* V.
Logo, é consequência semântica.

Exemplo 5

Justificativa formal 2:

Suponhamos que não é consequência semântica.
Daí, existe uma interpretação I *para* $\{p, q\}$*, na qual* $p \vee q : V$, $\neg q : V$ *e* $p : F$.
Daí, temos uma contradição: $p \vee q : V$, $p : F$ *e* $q : F$
Logo, é consequência semântica.

Seria viável aplicar o Método das Tabelas, pois a tabela teria apenas 4 linhas e 4 colunas.

A ideia principal

A justificativa da consequência (ou não consequência) dos casos em que a consequência (ou não consequência) é imediata pode ser feita por um raciocínio simples, baseado na definição de valor de uma fórmula em uma interpretação.

Neste caso, tabelas, embora viáveis, são desnecessárias.

Na prática, fazemos isto “de cabeça” e nos convencemos rapidamente de que a consequência (ou não consequência) se estabelece.

Parte 3

Passos Lógicos

Passos lógicos

Os exemplos acima motivam um dos principais conceitos relativos à maneira como os matemáticos justificam conclusões a partir de premissas, sem o emprego de tabelas.

Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi \in FLC$, onde ψ é considerada como conclusão.

Dizemos que $\dfrac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}{\psi}$ é um passo lógico se:

(1) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

(2) a tabela conjunta de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi$ possui no máximo 8 linhas (e um número polinomial de colunas).

Passos lógicos

Informalmente, um passo lógico é uma estrutura $\dfrac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}{\psi}$ (simbolizado ou não) que (1) é consequência e que (2) não é muito grande.

Formalmente, um passo lógico é uma consequência semântica, cuja correção não é trabalhosa de verificar, mesmo se usamos uma tabela de avaliação ...

Mas ... na prática, fazemos isto "de cabeça".

Passos lógicos associados ao $\neg$

$$\frac{\neg\neg p}{p} \quad , \quad \frac{\neg(p \wedge q)}{\neg p \vee \neg q} \quad , \quad \frac{\neg(p \vee q)}{\neg p \wedge \neg q}$$

$$\frac{\neg(p \rightarrow q)}{p \wedge \neg q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l}\neg(p \leftrightarrow q)\\ p\end{array}}{\neg q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l}\neg(p \leftrightarrow q)\\ q\end{array}}{\neg p}$$

Os 4 primeiros são equivalências.

Passos lógicos associados ao $\wedge$

$$\frac{p \wedge q}{p} \quad , \quad \frac{p \wedge q}{q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l} p \\ q \end{array}}{p \wedge q}$$

$$\frac{p \wedge q}{p \vee q} \quad , \quad \frac{p \wedge q}{p \rightarrow q} \quad , \quad \frac{p \wedge q}{p \leftrightarrow q}$$

Nenhum deles é uma equivalência.

Passos lógicos associados ao $\vee$

$$\frac{p}{p \vee q} \quad , \quad \frac{q}{p \vee q} \quad , \quad \frac{p \vee q}{q \vee p}$$

$$\frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \end{array}}{p} \quad , \quad \frac{(p \vee q) \vee r}{p \vee (q \vee r)}$$

O terceiro e o último são equivalências.

Passos lógicos associados ao $\rightarrow$

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg p \vee q} \quad , \quad \frac{q}{p \rightarrow q} \quad , \quad \frac{\neg p}{p \rightarrow q}$$

O quarto é uma equivalência.

Passos lógicos associados ao $\leftrightarrow$

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ p \leftrightarrow q \end{array}}{q} \quad , \quad \frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q} \quad , \quad \frac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p}$$

$$\frac{p \leftrightarrow q}{q \leftrightarrow p} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l} \neg p \\ p \leftrightarrow q \end{array}}{\neg q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l} \neg q \\ p \leftrightarrow q \end{array}}{\neg p}$$

O quarto é uma equivalência.

Passos lógicos maiores

Passos lógicos são consequências semânticas que podem ser verificadas por meio de tabelas pequenas.

Isto facilita a verificação de que elas são, de fato, passos lógicos.

Mas, na prática, é conveniente considerarmos como passos lógicos, consequências semânticas que possuem tabelas um pouco maiores. Isto desde que tenhamos certeza de que uma tal consequência tenha a mesma forma que um passo lógico.

Formas de passos lógicos

Certos argumentos têm a mesma forma, que um passo lógico.

Por xemplo, como

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}$$

é um passo lógico, o argumento

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \vee s \\ ((p \wedge q) \vee s) \to ((t \to u) \leftrightarrow v) \\ \hline (t \to u) \leftrightarrow v \end{array}$$

também é aceito como um passo lógico.

Formas de passos lógicos

Baseados nestas ideias, usualmente, escrevemos os passos lógicos usando as letras φ, ψ, θ no lugar de variáveis proposicionais, para indicar que a os passos lógicos dão origem a uma infinidade de argumentos válidos.

Parte 4

Exercícios

Exercício 1

Classificar como passo lógico ou não.

(i) $$\frac{\varphi \wedge \neg\varphi}{\psi}$$

(ii) $$\frac{(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta}{\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)}$$

(iii) $$\frac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \wedge \neg\psi}$$

(iv) $$\frac{\varphi \vee \neg\psi}{\varphi \to \psi}$$

(v) $$\frac{\begin{array}{l}\varphi \vee \psi \\ \neg\psi\end{array}}{\varphi \to \psi}$$

(vi) $$\frac{\neg(\varphi \to (\psi \to \theta))}{\neg\theta}$$

(vii) $$\frac{\varphi \to \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

(viii) $$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \to \neg\psi \\ \psi \vee \theta \\ \theta \to \pi\end{array}}{\varphi \to \pi}$$

Mais exercícios!

Lista de Exercícios – Aula 10

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Classificar como passo lógico ou não:

(ix) $\dfrac{\neg\varphi \quad \psi}{\varphi \to \psi}$

(x) $\dfrac{\neg\psi}{(\varphi \to \theta) \vee \neg\psi}$

(xi) $\dfrac{\varphi \vee (\psi \to \theta) \quad \neg\varphi}{\neg\psi \vee \theta}$

(xii) $\dfrac{\varphi \vee \psi}{\varphi \wedge \psi}$

(xiii) $\dfrac{\varphi \to \psi \quad \psi \to \theta \quad \neg\theta}{\neg\varphi}$

(xiv) $\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \psi \vee \theta}{\varphi \vee \theta}$

Demonstrações Diretas na Lógica dos Conectivos

Petrucio Viana & Renata de Freitas

IME, UFF

21 de março de 2023

Sumário

Argumentos formais e validade na LC

Argumentos formais

Definição. Um **argumento formal da LC** é uma sequência de fórmulas da LC na qual a última é considerada como conclusão eas demais como premissas.

Um argumento formal $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \varphi_n)$ é usualmente apresentado do seguinte modo:

$$\begin{array}{l} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \hline \varphi_n \end{array}$$

onde usamos uma barra vertical para separar as premissas da conclusão.

Argumentos formais

A ordem em que as premissas são escritas não é relevante.

Definição. Um argumento formal da LC é **válido** se estabelece uma consequência semântica, ou seja, se sua conclusão é consequência semântica das suas premissas.

Parte 2

Demonstrações Diretas na LC

Analisando o argumento formal

Como os passos lógicos podem nos ajudar na justificativa da validade de um argumento formal?

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ s \rightarrow t \\ \hline t \end{array}$$

Este argumento formal não é um passo lógico: é muito grande.

Mas, neste caso, vemos que a validade é imediata.

A ideia principal

Comparando o argumento formal com o passo lógico:

$$\begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \to \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

vemos que o argumento formal consiste de várias instâncias deste passo lógico.

Explicando a validade

No passo lógico, temos as premissas φ e $\varphi \rightarrow \psi$ e concluímos ψ.

No argumento formal, temos as premissas p e $p \rightarrow q$ e podemos concluir q.

Agora, temos q e $q \rightarrow r$ e podemos concluir r.

Agora, temos r e $r \rightarrow s$ e podemos concluir s.

E, finalmente, temos s e $s \rightarrow t$ e concluímos t.

Resumindo a explicação

Podemos justificar a validade do argumento formal, através de um texto como:

Suponhamos p, $p \to q$, $q \to r$, $r \to s$ e $s \to t$.
De p e $p \to q$, temos q.
De q e $q \to r$, temos r.
De r e $r \to s$, temos s.
De s e $s \to t$, temos t.

O argumento formal é válido, pois a conclusão é demonstrável a partir das premissas, por meio de passos lógicos.

Analisando o argumento

Considere o argumento formal:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ q \to \neg r \\ r \vee (s \wedge t \wedge u) \\ \hline u \end{array}$$

Que passos lógicos podemos associar a ele?

Procurando passos lógicos

Analisando o argumento formal:

$$\begin{array}{l} \quad p \vee q \\ \quad \neg p \\ \quad q \to \neg r \\ \quad r \vee (s \wedge t \wedge u) \\ \hline u \end{array}$$

chegamos aos seguintes passos lógicos:

$$\begin{array}{l} \varphi \vee \psi \\ \neg \varphi \\ \hline \psi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \to \neg \psi \\ \hline \neg \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg \varphi \\ \varphi \vee \psi \\ \hline \psi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \varphi \wedge \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

Aplicando passos lógicos

Podemos justificar a validade do argumento formal, através de um texto como:

> *Suponhamos* $p \vee q$, $\neg p$, $q \rightarrow \neg r$, *e* $r \vee (s \wedge t \wedge u)$.
> *De* $p \vee q$ *e* $\neg p$, *temos* q.
> *De* q *e* $q \rightarrow \neg r$, *temos* $\neg r$.
> *De* $\neg r$ *e* $r \vee (s \wedge t \wedge u)$, *temos* $s \wedge t \wedge u$.
> *De* $s \wedge t \wedge u$, *temos* u.

O argumento formal é válido, pois a conclusão é demonstrável a partir das premissas, por meio de passos lógicos.

Analisando o argumento formal

Considere o argumento formal:

$$
\begin{array}{l}
p \rightarrow (r \vee \neg q) \\
\neg r \\
\neg q \rightarrow s \\
\neg s \vee t \\
\neg r \rightarrow p \\
\hline
t
\end{array}
$$

Que passos lógicos podemos associar a ele?

Procurando passos lógicos

Analisando o argumento formal:

$$\begin{array}{l} p \to (r \vee \neg q) \\ \neg r \\ \neg q \to s \\ \neg s \vee t \\ \neg r \to p \\ \hline t \end{array}$$

chegamos aos seguintes passos lógicos:

$$\begin{array}{l} \varphi \\ \varphi \to \psi \\ \hline \psi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \neg\varphi \\ \varphi \vee \psi \\ \hline \psi \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \varphi \\ \neg\varphi \vee \psi \\ \hline \psi \end{array}$$

Aplicando passos lógicos

Podemos justificar a validade do argumento formal, através de um texto como:

> *Suponhamos* $p \to (r \vee \neg q)$, $\neg r$, $\neg q \to s$, $\neg s \vee t$ *e* $\neg r \to p$.
> *De* $\neg r$ *e* $\neg r \to p$, *temos* p.
> *De* p *e* $p \to r \vee \neg q$, *temos* $r \vee \neg q$.
> *De* $\neg r$ *e* $r \vee \neg q$, *temos* $\neg q$.
> *De* $\neg q$ *e* $\neg q \to s$, *temos* s.
> *De* s *e* $\neg s \vee t$, *temos* t.

O argumento formal é válido, pois a conclusão é demonstrável a partir das premissas, por meio de passos lógicos.

Aplicando passos lógicos

A ideia geral para justificarmos de que um argumento formal é válido é nos apoiarmos em outros argumentos formais, cujas validades são mais simples de serem detectadas, e usarmos estes argumentos na construção, passo a passo, de um texto que justifica a validade do argumento formal original.

A princípio, este texto parte das premissas do argumento formal e vai gradativamente, pela aplicação dos outros argumentos formais, caminhando para a conclusão do argumento original.

Demonstrações, 1ª abordagem

Uma demonstração direta de que um argumento formal é válido é um texto construído passo a passo, a partir das hipóteses do argumento, por meio de aplicações de passos lógicos, como ilustrado nos exemplos anteriores.

A seguir, vamos melhorar um pouco esta descrição do que é uma demonstração direta ...

Antes, porém, vejamos alguns exemplos nos quais trocamos o texto por uma notação mais compacta.

Exemplo 6

$$p, p \to q, q \to s, s \to t \models t$$

Demonstração:

	1.	p
	2.	$p \to q$
	3.	$q \to r$
	4.	$r \to s$
	5.	$s \to t$
1, 2	6.	q
3, 6	7.	r
4, 7	8.	s
5, 8	9.	t ■

Utilizamos o ■ para indicar o fim da demonstração.

O único passo lógico empregado foi:

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}$$

Exemplo 7

$$p \vee q, \neg p, q \to \neg r, r \vee (s \wedge t \wedge u) \models u$$

Demonstração:

	1.	$p \vee q$
	2.	$\neg p$
	3.	$q \to \neg r$
	4.	$r \vee (s \wedge t \wedge u)$
1, 2	5.	q
3, 5	6.	$\neg r$
4, 6	7.	$s \wedge t \wedge u$
7	9.	u ■

Os passos lógicos empregados foram:

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi} \qquad \frac{\begin{array}{l}\varphi \vee \psi \\ \neg \varphi\end{array}}{\psi} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

Exemplo 8

$$p \rightarrow (r \vee \neg q), \neg r, \neg q \rightarrow s, \neg s \vee t, \neg r \rightarrow p \models t$$

Demonstração:

	1.	$p \rightarrow (r \vee \neg q)$
	2.	$\neg r$
	3.	$\neg q \rightarrow s$
	4.	$\neg s \vee t$
	5.	$\neg r \rightarrow p$
2, 5	6.	p
1, 6	7.	$r \vee \neg q$
2, 7	8.	$\neg q$
3, 8	9.	s
4, 9	10.	t ■

Os passos lógicos empregados foram:

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi} \qquad \frac{\begin{array}{l}\varphi \vee \psi \\ \neg\varphi\end{array}}{\psi} \qquad \frac{\begin{array}{l}\neg\varphi \vee \psi \\ \varphi\end{array}}{\psi}$$

Demonstrações, 2ª abordagem

Definição. Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi \in FLC$.

Uma **demonstração (direta)** de ψ a partir de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ é uma sequência finita de fórmulas

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m, \theta_{m+1}$$

tal que:
(1) θ_{m+1} é ψ, ou seja, a sequência termina em ψ;
(2) para cada i, $1 \leq i \leq m+1$, existem $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots, \varphi_{i_k}$ anteriores a i na sequência, tais que

$$\frac{\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots, \varphi_{i_2}}{\varphi_i}$$

é um passo lógico, ou seja, exceto as fórmulas dadas como premissas, todas as outras são obtidas de anteriores por meio de passos lógicos.

Parte 2

Exercícios

Exercício 1

Construir demonstrações diretas para a validade dos seguintes argumentos formais:

(i)
$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow (q \wedge r) \\ q \rightarrow (s \wedge t) \\ \hline t \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ q \rightarrow r \\ r \rightarrow (s \wedge t) \\ t \rightarrow (u \wedge v) \\ \hline u \end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{l} \neg p \\ p \vee (q \wedge r) \\ \neg r \wedge t \\ \hline t \end{array}$$

(iv)
$$\begin{array}{l} (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \\ s \rightarrow t \\ t \rightarrow \neg q \\ s \wedge t \\ \hline p \end{array}$$

Exercício 1

(v)
$$\frac{\begin{array}{l} q \to t \\ s \wedge q \\ t \to r \\ \neg r \vee (s \vee t) \end{array}}{s \vee t}$$

(vi)
$$\frac{\begin{array}{l} \neg p \vee (q \to r) \\ t \wedge p \\ t \to q \end{array}}{r \vee s}$$

Mais exercícios!

Lista de Exercícios – Aula 11

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Verificar a validade em LC dos argumentos formais obtidos pela simbolização dos seguintes *argumentos informais*:

(i) Oscar e Virgínia assistem as aulas pois Jorge assiste. Virgínia assiste as aulas. Logo, Jorge assiste as aulas ou Oscar não assiste.

(ii) Se $x < 0$, $f(x) = x$. Mas, como não é o caso que $x < 0$, $f(x) = 5$. Temos, então, que $f(x) = x$ ou 5.

(iii) Se Virgínia assiste as aulas, então Joana assiste as aulas somente se Jorge e Míriam assistem. Virgínia e Joana assistem as aulas. Daí, Jorge e Míriam também.

(iv) Uma condição necessária para Oscar frequentar as aulas é que Míriam e Virgínia frequentem. Uma condição suficiente para Virgínia frequentar as aulas é que Jorge frequente. Entretanto, Jorge não frequenta as aulas, a menos que Míriam frequente. E Virgínia frequenta as aulas somente se Oscar frequenta. Daí, Virgínia frequenta as aulas quando, e exatamente quando, Oscar frequenta.

(v) Uma condição necessária para que f tenha um máximo no intervalo $[a, b]$ é que f seja contínua em $[a, b]$ e definida em a. Uma condição necessária, que também é suficiente, para que f tenha um máximo em $[a, b]$ é que exista um ponto c entre a e b, tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Existe um ponto c entre a e b, tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Logo, f é contínua em $[a, b]$ e é definida em a.

Demonstrações Indiretas na Lógica dos Conectivos

Petrucio Viana & Renata de Freitas

IME, UFF

21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Olhe para as premissas

Um problema de validade

Considere o seguinte argumento formal (1):

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ r \to s \\ s \to t \\ \hline p \to t \end{array}$$

(1) é válido ou não?

Uma demonstração

A resposta é ... válido!

Como já vimos, uma demonstração de que (1) é válido é:

Demonstração:

	1.	$p \to q$
	2.	$q \to r$
	3.	$r \to s$
	4.	$s \to t$
1, 2	5.	$p \to r$
3, 5	6.	$p \to s$
4, 6	7.	$p \to t$ ■

Nesta demonstração, o único passo lógico utilizado foi:

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi \to \psi \\ \psi \to \theta\end{array}}{\varphi \to \theta}$$

Demonstrações diretas

De maneira geral, podemos dizer que a demonstração anterior foi construída pela execução dos seguintes passos:

1. análise das premissas;
2. aplicação de passos lógicos às premissas para a obtenção de fórmulas intermediárias;
3. aplicação de passos lógicos às premissas e às fórmulas intermediárias, para a obtenção da conclusão.

Por esta razão este tipo de demonstração é chamada de **demonstração direta**.

Estratégia geral das demonstrações diretas

Em linhas gerais, a estratégia geral das demonstrações diretas é:

parta das premissas

e

analisando as premissas,

através de passos lógicos,

chegue na conclusão.

Outra solução

Parta das premissas e chegue na conclusão.

Ou, alternativamente. . .

Parte 2

Olhe para a conclusão

Olhe para a conclusão

Uma outra demonstração de que (1) é válido pode ser obtida, baseada na ideia a seguir.

Esqueça as premissas e note que a conclusão de (1) é uma implicação:

$$\frac{\Sigma}{p \rightarrow t}$$

Quando podemos considerar que a implicação $p \rightarrow t$ é consequência de um conjunto de premissas?

Para mostrar que a implicação $p \rightarrow t$ segue de um conjunto de premissas, basta mostrar que quando assumimos que as premissas são V, "a verdade não decresce" quando "passamos de p para t".

Olhe para a conclusão

Mostrar que "a verdade não decresce" quando "passamos de p para t", é mostrar que, quando assumimos que p é V, temos que t é V.

Assim, um dos muitos possíveis critérios é:

> *Quando assumindo que todas as premissas são V, podemos garantir que ambas s e t são V.*

Logo, para mostrar que (1) é válido, basta mostrar que o seguinte argumento formal, (2), é válido:

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ s \rightarrow t \\ \hline t \end{array}$$

Demonstração

A esta altura, não temos nenhuma dificuldade em construir uma demonstração para (2):

Demonstração:

	1.	$p \to q$
	2.	$q \to r$
	3.	$r \to s$
	4.	$s \to t$
	5.	p
1, 5	6.	q
2, 6	7.	r
3, 7	8.	s
4, 8	9.	t ■

Nesta demonstração, o único passo lógico utilizado foi:

$$\begin{array}{l} \varphi \to \psi \\ \varphi \\ \hline \psi \end{array}$$

Observe que...

Queríamos demonstrar $p \to t$ a partir de Σ.

Mas, na verdade, demonstramos t a partir de $\Sigma \cup \{p\}$.

Para demonstrar a validade de um argumento dado, demonstramos a validade de um outro argumento “inventado” a partir do primeiro.

O argumento inventado tem uma premissa a mais e uma conclusão mais simples.

Outro problema de validade

Considere o argumento (3):

$$\begin{array}{l} \neg p \vee r \\ \neg t \to \neg s \\ r \to s \\ \hline (p \wedge q) \to (s \wedge t) \end{array}$$

(3) é válido ou não?

Olhe para a conclusão

Para demonstrar

$$\frac{\Sigma}{(p \wedge q) \rightarrow (s \wedge t)}$$

basta demonstrar

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma \\ p \wedge q\end{array}}{s \wedge t}$$

Olhe para a conclusão, novamente

Esqueça as premissas e note que agora a conclusão é uma conjunção:

$$\frac{\Sigma}{s \wedge t}$$

Quando podemos considerar que a conjunção $s \wedge t$ é consequência de um conjunto de premissas?

Um dos muitos possíveis critérios é:

> *Quando assumindo que todas as premissas são V, podemos garantir que ambas s e t são V.*

Olhe para a conclusão, novamente

Para demonstrar

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma \\ p \wedge q\end{array}}{s \wedge t}$$

basta demonstrar

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma \\ p \wedge q\end{array}}{s}$$

e

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma \\ p \wedge q\end{array}}{t}$$

Demonstrações ...

Demonstração:

	1.	$\neg p \lor r$
	2.	$\neg t \to \neg s$
	3.	$r \to s$
	4.	$p \land q$
4	5.	p
1, 5	6.	r
3, 6	7.	s ■

Demonstração:

	1.	$\neg p \lor r$
	2.	$\neg t \to \neg s$
	3.	$r \to s$
	4.	$p \land q$
4	5.	p
1, 5	6.	r
3, 6	7.	s
2, 7	8.	t ■

. . . que podem ser escritas juntas

Demonstração:

	1.	$(\neg p) \vee r$
	2.	$(\neg t) \to \neg s$
	3.	$r \to s$
	4.	$p \wedge q$
4	5.	p
1, 5	6.	r
3, 6	7.	s
2, 7	8.	t ■

Na verdade, temos duas demonstrações escritas como se fossem uma só.

Observação

Queríamos demonstrar $(p \wedge q) \to (s \wedge t)$ a partir de Σ.

Na verdade, demonstramos ambas s e t a partir de $\Sigma \cup \{p \wedge q\}$.

Para demonstrar a validade de um argumento dado, demonstramos a validade de dois outros argumentos "inventados" a partir do primeiro.

Os argumentos inventados têm, cada um, uma premissa a mais e uma conclusão mais simples.

Ainda outro problema de validade

Considere o argumento (4):

$$\begin{array}{l} t \to \neg q \\ (\neg t) \to r \\ \hline (s \wedge q) \to (r \vee \neg s) \end{array}$$

(4) é válido ou não?

Olhe para a conclusão

Para demonstrar

$$\frac{\Sigma}{(s \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg s)}$$

basta demonstrar

$$\frac{\begin{array}{l}\Sigma \\ s \wedge q\end{array}}{r \vee \neg s}$$

Olhe para a conclusão, novamente

Esqueça as premissas e note que agora a conclusão é uma disjunção:

$$\frac{\Sigma}{r \vee \neg s}$$

Quando podemos considerar que a disjunção $r \vee \neg s$ é consequência de um conjunto de premissas?

Um dos muitos possíveis critérios é:

> *Quando assumindo que todas as premissas são V, podemos garantir que r é V.*

Demonstração

Demonstração:

	1.	$t \to \neg q$
	2.	$\neg t \to r$
	3.	$s \wedge q$
3	4.	q
1, 4	5.	$\neg t$
2, 5	6.	r $\blacksquare$

Observação

Queríamos demonstrar $(s \wedge q) \rightarrow (r \vee \neg s)$ a partir de Σ.

Na verdade, demonstramos r a partir de $\Sigma \cup \{s \wedge q\}$.

Para demonstrar a validade de um argumento dado, demonstramos a validade de um outro argumento "inventado" a partir do primeiro.

O argumento inventado tem uma premissa a mais e uma conclusão mais simples.

Parte 3

Estratégias indiretas

Estratégias diretas

Nos esboços de demonstrações acima, aplicamos passos lógicos, como:

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi} \quad , \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad , \quad \frac{\begin{array}{l}\neg\varphi \to \neg\psi \\ \psi\end{array}}{\varphi}$$

que afirmam diretamente que certos argumentos são válidos.

Estratégias indiretas

Aplicamos, também, estratégias aparentemente corretas, como:

(i) Para demonstrar $\dfrac{\Sigma}{\varphi \to \psi}$, basta demonstrar $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \varphi\end{array}}{\psi}$,

(ii) Para demonstrar $\dfrac{\Sigma}{\varphi \wedge \psi}$, basta demonstrar ambos $\dfrac{\Sigma}{\varphi}$ e $\dfrac{\Sigma}{\psi}$,

(iii) Para demonstrar $\dfrac{\Sigma}{\varphi \vee \psi}$, basta demonstrar $\dfrac{\Sigma}{\varphi}$,

que afirmam indiretamente que certos argumentos são válidos.

Estratégias indiretas

Dizemos indiretamente porque, em essência, o que estas estratégias afirmam é que podemos concluir que

um dado argumento é válido

se mostrarmos que

um outro argumento, com mais premissas e conclusão mais simples, é válido.

Estratégias indiretas

Um passo lógico (ou uma regra de inferência correta) afirma que um certo argumento (ou argumentos que possuem a mesma forma) é válido (são válidos).

Uma estratégia indireta é uma regra de outro tipo.

Ela não afirma que um certo argumento (ou argumentos que possuem a mesma forma) é válido (são válidos).

Estratégias indiretas

Mas, sim, que a validade de certos argumentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (ou de argumentos que possuem a mesma forma) acarreta a validade de outro argumento A (ou de argumentos que possuem a mesma forma).

Além disto, para que a estratégia faça sentido, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ devem ser mais simples (sob um determinado critério de simplicidade) que A.

Estratégias corretas

Seja

$$\text{Se } A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n, \text{ então } A$$

uma estratégia indireta de demonstração.

Dizemos que

$$\text{Se } A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n, \text{ então } A$$

é **correta** se a validade simultânea de A_1, A_2, ..., A_n acarreta a validade de A.

Parte 4

Primeiros exemplos

Método da suposição

Para demonstrar uma implicação, basta supor o antecedente e demonstrar o consequente.

$$\text{Se } \frac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \varphi\end{array}}{\psi}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi \to \psi}.$$

Esta estratégia indireta também é chamada de **Introdução do** $\to$.

Exemplício 1

Apresente uma demonstração indireta da validade do argumento a seguir, usando o Método da suposição.

$$\begin{array}{c} a \to (b \lor c) \\ a \to \neg b \\ c \to \neg d \\ \hline a \to \neg d \end{array}$$

Agora, apresente uma demonstração direta do mesmo argumento.

Método da conjunção

Para demonstrar uma conjunção, basta demonstrar cada componente.

$$\text{Se } \frac{\Sigma}{\varphi} \text{ e } \frac{\Sigma}{\psi}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi \wedge \psi}.$$

Esta estratégia indireta também é chamada de **Introdução do** $\wedge$.

Exemplício 2

Apresente uma demonstração indireta da validade do argumento a seguir, usando o Método da conjunção.

$$\begin{array}{l} a \to \neg b \\ \neg d \vee \neg c \\ b \\ \hline c \to (\neg a \wedge \neg d) \end{array}$$

Agora, apresente uma demonstração direta do mesmo argumento.

Método da disjunção

Para demonstrar uma disjunção, basta demonstrar ao menos um dos componentes.

$$\text{Se } \frac{\Sigma}{\varphi}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi \lor \psi}.$$

$$\text{Se } \frac{\Sigma}{\psi}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi \lor \psi}.$$

Estas duas estratégias indiretas também são chamadas de **Introdução do** $\lor$.

Exemplício 3

Apresente uma demonstração indireta da validade do argumento a seguir, usando o Método da disjunção.

$$\begin{array}{l} (a \land e) \land f \\ a \rightarrow (b \lor c) \\ b \rightarrow \neg a \\ \neg d \rightarrow \neg c \\ \hline c \lor d \end{array}$$

Agora, apresente uma demonstração direta do mesmo argumento.

Método da bi-implicação

Para demonstrar uma bi-implicação, basta demonstrar duas implicações associadas: uma que demonstra que o primeiro componente acarreta o segundo componente e a outra que demonstra, reciprocamente, que o segundo componente acarreta o primeiro componente.

$$\text{Se } \frac{\Sigma}{\varphi \to \psi} \text{ e } \frac{\Sigma}{\psi \to \varphi}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi \leftrightarrow \psi}.$$

Esta estratégia indireta também é chamada de **Introdução do** $\leftrightarrow$.

Exemplício 4

Apresente uma demonstração indireta da validade do argumento a seguir, usando o Método da bi-implicação.

$$
\begin{array}{l}
a \rightarrow c \\
\neg c \vee d \\
b \leftrightarrow d \\
b \rightarrow \neg(\neg a \wedge d) \\
\hline
a \leftrightarrow b
\end{array}
$$

Agora, apresente uma demonstração direta do mesmo argumento.

Parte 5

Exercícios

Exercício 1

Construir demonstrações indiretas para os seguintes argumentos:

(i)

$$\begin{array}{l} a \rightarrow (b \rightarrow c) \\ c \rightarrow \neg d \\ \neg e \rightarrow d \\ \hline b \rightarrow (a \rightarrow e) \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{l} (a \vee b) \vee c \\ a \rightarrow (d \leftrightarrow \neg e) \\ b \rightarrow \neg(\neg d \vee e) \\ e \rightarrow \neg(c \vee d) \\ \neg e \rightarrow c \wedge d \\ \hline d \leftrightarrow \neg e \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{l} (a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow \neg d) \\ (e \rightarrow \neg b) \wedge (\neg f \rightarrow d) \\ \neg e \vee f \rightarrow g \\ \neg b \rightarrow d \\ a \vee c \\ \hline b \wedge g \end{array}$$

(iv)

$$\begin{array}{l} a \wedge c \rightarrow d \\ b \wedge c \rightarrow d \\ \neg a \wedge \neg b \rightarrow e \vee f \\ g \rightarrow \neg e \\ f \rightarrow h \\ c \wedge \neg d \\ \hline \neg g \vee h \end{array}$$

Exercício 1

(v)
$$\frac{\begin{array}{l} a \wedge (b \vee c) \\ a \wedge b \rightarrow d \wedge \neg f \\ a \rightarrow [c \rightarrow \neg(d \vee \neg f)] \end{array}}{d \leftrightarrow \neg f}$$

(vi)
$$\frac{\begin{array}{l} a \wedge b \rightarrow c \\ a \vee e \\ g \rightarrow (\neg c \wedge \neg d) \\ a \leftrightarrow b \\ a \rightarrow c \\ c \rightarrow \neg d \\ b \rightarrow d \end{array}}{\neg a \wedge (g \rightarrow e)}$$

(vii)
$$\frac{\begin{array}{l} \neg a \rightarrow c \vee d \\ b \rightarrow e \wedge f \\ e \rightarrow d \\ \neg d \end{array}}{(a \rightarrow b) \rightarrow c}$$

(viii)
$$\frac{\begin{array}{l} a \rightarrow b \\ c \rightarrow \neg b \\ \neg c \rightarrow d \\ a \wedge \neg d \end{array}}{e \rightarrow f}$$

Exercício 2

(a) Contruir demonstrações diretas para os argumentos do Exercício 1.

(b) Faça um relatório das dificuldades que você encontrou ao resolver o Exercício 2(a).

Exercícios

Lista de Exercícios – Aula 12

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Exercício 1 (a) Examine cada argumento informal abaixo e tente adivinhar se ele é válido ou não.

(b) Depois disto, simbolize cada argumento informal e, após um exame das premissas e conclusão do argumento formal simbolizado, tente novamente adivinhar se o argumento original é válido ou não.

(c) Veja se a sua percepção sobre a validade de cada argumento mudou, quando você passou do argumento informal não simbolizado para o argumento formal simbolizado.

(d) Para solidificar e justificar as suas intuições, nos casos positivos, apresente uma demonstração indireta e uma demonstração direta da validade; e nos caso negativos, determine uma interpretação na qual as premissas são V e a concusão é F.

(i) O governo não financiar a educação mostra que há uma autogestão na educação. Porém, se há uma autogestão na educação, não há uma crise na educação. Mas, há uma crise na educação ou as escolas estão falidas. Assim, o governo financia a educação se as escolas não estão falidas.

(ii) Quando chove eu uso guarda-chuva. Se faz sol, eu uso protetor solar. Ora, chove ou eu uso protetor solar. Consequentemente, eu uso guarda-chuva ou faz sol.

(iii) Se Primeiro é o terceiro, então se Segundo é o segundo, Terceiro é o quarto. Quarto não é o primeiro ou Primeiro é o terceiro. Na verdade, Segundo é o segundo. Daí, se Quarto é o primeiro, então Terceiro é o quarto.

(iv) Quando vou ao cinema, como pipoca ou cachorro quente. Mas, se vou ao teatro, como pizza ou sushi. Nas vezes em que não como pipoca, como sushi ou hamburguer. Além disso, vou ao teatro quando como sushi, mas se não como pizza, não vou ao teatro. Deste modo, se não como hamburguer e vou ao cinema, vou ao teatro ou como sushi.

(v) Se Shareef Dancer vencer a corrida, então Annihilator ou Green Monkey vai cruzar a linha de chegada. Se Annihilator cruzar a linha, então Shareef Dancer não vai vencer. Se Seattle Dancer cruzar a linha, então Green Monkey não vai cruzar. Logo, se Shareef Dancer vencer, Seattle Dancer não vai cruzar a linha.

Redução ao Absurdo na Lógica dos Conectivos

Petrucio Viana

IME - UFF

21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

A ideia de redução ao absurdo

Contradições

Definição. Uma **contradição** é uma fórmula da forma $\varphi \wedge \neg\varphi$.

Contradições são F em todas as suas interpretações:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi$
V	F	F
F	V	F

Contradições parecem ser indesejáveis por duas razões:

1. Intuitivamente, o que é falso é negativo.
2. A partir de uma contradição podemos demonstrar qualquer fórmula.

Contradições

A partir de uma contradição podemos demonstrar qualquer fórmula.

De fato,

como não existem interpretações nas quais $\varphi \wedge \neg\varphi$ é V,

dada qualquer fórmula ψ,

não existem interpretações nas quais $\varphi \wedge \neg\varphi$ é V e ψ é F.

Logo, o argumento

$$\frac{\varphi \wedge \neg\varphi}{\psi}$$

é um passo lógico (generalizado).

Contradições

A partir de uma contradição podemos demonstrar qualquer fórmula.

Outra maneira de ver isto ...

Seja $\dfrac{\varphi \wedge \neg\varphi}{\psi}$ um argumento cuja premissa é uma contradição e cuja conclusão é uma fórmula qualquer.

De acordo com a tabela:

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$
V	*V*	*F*	*F*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*V*	*F*	*V*
F	*F*	*V*	*F*	*V*

a implicação associada $(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$ é *V* em todas as suas interpretações.

Logo, o argumento $\dfrac{\varphi \wedge \neg\varphi}{\psi}$ é um passo lógico (generalizado).

Usando contradições para raciocinar

Assim, aparentemente, contradições são indesejáveis e devem ser evitadas.

Porém, contradições podem ser úteis, mesmo quando raciocinamos em busca da certeza e da verdade.

De fato, contradições podem ser usadas, por exemplo, para avaliarmos todas as possibilidades e excluirmos as contraditórias.

Exemplo 1 (com apelo a semântica)

Aldo, Beto e Caco são muito amigos.
Um é dentista, outro é escritor e outro é farmacêutico.
Cada um deles mora em um bairro diferente do Rio de Janeiro.
Um no Grajaú, outro em Higienópolis e o último em Ipanema.

De posse destes dados, considere as afirmações:

1. Caco não é dentista nem escritor.
2. O dentista mora em Higienópolis.
3. Beto é escritor e não mora no Grajaú.

Baseado nelas, qual informação podemos garantir?
(a) Beto mora no Grajaú. (b) Caco mora no Grajaú. (c) Beto é dentista. (d) Aldo mora em Ipanema. (e) Caco não é farmaceutico.

Resolução do Exemplo 1 (esboço)

Vamos denotar:

A : Aldo	B : Beto	C: Caco
D : dentista	E : escritor	F : farmacêutico
G : Grajaú	H : Higienópolis	I : Ipanema

E vamos simbolizar "X tem a profissão Y" ou "X mora no bairro Y" por XY.

Por exemplo, "Aldo é dentista" pode ser simbolizado por AD.

E "Caco mora em Ipanema" pode ser simbolizado por CI.

Resolução do Exemplo 1 (esboço)

As informações explícitas podem ser simbolizadas por:

1. *Caco não é dentista nem escritor*: $\neg CD$ e $\neg CE$.
2. *O dentista mora em Higienópolis*: $AD \to AH$, $BD \to BH$ e $CD \to CH$.
3. *Beto é escritor e não mora no Grajaú*: BE e $\neg BG$.

As informações implícitas também podem ser simbolizadas.

Cada um deles tem ao menos uma das profissões:

$$AD \vee BD \vee CD$$
$$AE \vee BE \vee CE$$
$$AF \vee BF \vee CF$$

Resolução do Exemplo 1 (esboço)

Cada um deles mora em ao menos um dos bairros:

$$AG \vee BG \vee CG$$
$$AH \vee BH \vee CH$$
$$AI \vee BI \vee CI$$

Agora, aplicando o passo lógico $\neg\varphi, \varphi \vee \psi \models \psi$ juntamente com as premissas $\neg CD$, $\neg CE$ e $\neg BG$, temos:

$$AD \vee BD$$
$$AE \vee BE$$
$$AF \vee BF \vee CF$$
$$AG \vee CG$$
$$AH \vee BH \vee CH$$
$$AI \vee BI \vee CI$$

Resolução do Exemplo 1 (esboço)

Agora, como temos BE e está implícito que o "ou" é exclusivo, as opções BD e BF contradizem BE.

Assim, temos:

$$\begin{array}{l} AD \\ AE \vee BE \\ AF \vee CF \\ AG \vee CG \\ AH \vee BH \vee CH \\ AI \vee BI \vee CI \end{array}$$

Analogamente, como temos AD, as opções AE e AF contradizem AD.

Resolução do Exemplo 1 (esboço)

Assim, temos:

$$\begin{array}{l} AD \\ BE \\ CF \\ AG \vee CG \\ AH \vee BH \vee CH \\ AI \vee BI \vee CI \end{array}$$

Agora podemos usar o passo lógico $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \models \psi$ juntamente com as premissas AD e $AD \rightarrow AH$ e obter AH.

Analogamente, como temos AH, as opções AG e AI contradizem AH.

Resolução do Exemplo 1 (esboço)

Assim, temos:

$$
\begin{array}{l}
AD \\
BE \\
CF \\
CG \\
AH \vee BH \vee CH \\
BI \vee CI
\end{array}
$$

Analogamente, como temos AH, as opções BH e CH contradizem AH.

E como temos CG, a opção CI contradiz CG.

Resolução do Exemplo 1 (esboço)

Assim, temos:

$$\begin{gathered} AD \\ BE \\ CF \\ CG \\ AH \\ BI \end{gathered}$$

E o problema está completamente resolvido.

Segue, finalmente que podemos garantir as opções (b) e (e).

Usando contradições para raciocinar

Na resolução do Exemplo 1, usamos o seguinte raciocínio:

1. Tínhamos garantido um enunciado da forma $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_i \vee \cdots \vee \varphi_n$.
2. Tínhamos garantido um enunciado da forma $\neg\varphi_i$.
3. Percebemos que a opção φ_i contradiz o enunciado $\neg\varphi_i$ e, por isso, não pode ser aceita.
4. Simplificamos o enunciado $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_i \vee \cdots \vee \varphi_n$, obtendo $\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_{i-1} \vee \varphi_{i+1} \vee \cdots \vee \varphi_n$.

Ideia da redução ao absurdo

Para demonstrar (garantir, justificar, provar, ...) que uma sentença ψ segue das sentenças $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$,, basta fazer o seguinte:

- Supor $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ como premissas;
- Supor $\neg\psi$ como premissa adicional;
- Demonstrar uma contradição a partir de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \neg\psi$.

Ideia da redução ao absurdo

Ou seja, para demonstrar que uma conclusão segue de algumas premissas, mostre que a sua negação é contraditória com as premissas.

Vejamos alguns exemplos clássicos de aplicação desta ideia.

Exemplo 2

Proposição: Se n^2 é par, então n é par.

Demonstração:
(Usando o Método da Suposição e o Método da Redução ao Absurdo.)

Suponha que n^2 é par
(para provar que n é par).

Suponha que n não é par
(para provar uma contradição, a partir de n^2 é par).

Exemplo 2

Daí, n é ímpar, ou seja, $n = 2k + 1$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Daí, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$,
ou seja, n^2 é ímpar,

uma contradição com n^2 é par.

Logo, n é par. $\blacksquare$

Exemplo 3

Proposição: $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Demonstração:
(Usando o Método da Redução ao Absurdo.)

Suponha que $\sqrt{2}$ é racional
(para provar uma contradição).

Daí, $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, onde $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ e $mdc(a, b) = 1$.

Daí, $2b^2 = a^2$.

Daí, a é par.

Exemplo 3

Ou seja, $a = 2k$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Daí, $2b^2 = (2k)^2 = 4k^2$ e, assim, $b^2 = 2k^2$.

Daí, b é par.

Logo, $mdc(a, b) \geq 2$, uma contradição com $mdc(a, b) = 1$. $\blacksquare$

Exemplo 4

Proposição: Existe uma quantidade infinita de números primos.

Demonstração:
(Usando o Método da Redução ao Absurdo.)

Suponha que existe uma quantidade finita de números primos (para provar uma contradição).

Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ todos os números primos existentes.

Considere o número $n = (p_1 \cdot p_2 \cdots p_n) + 1$.

Como todo número natural não nulo tem um fator primo, n tem um fator primo, digamos, p.

Observe que $p > 1$.

Exemplo 4

Como $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são todos os números primos, existe i, $1 \leq i \leq n$, tal que $p = p_i$.

Daí, temos, $n = p \cdot k$, onde k é um número natural.
Ou seja, p divide $(p_1 \cdot p_2 \cdots p_n) + 1$.

Além disso, $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = p_1 \cdots p_{i-1} \cdot p \cdot p_{i+1} \cdots p_n$
ou seja, p também divide $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$.

Logo, p divide $[(p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n) + 1] - (p_1 \cdot p_2 \cdots p_n)$.

Ou seja, p divide 1, uma contradição com $p > 1$. $\blacksquare$

Observações

Como toda boa estratégia indireta, ...
a Redução ao Absurdo aumenta o número de premissas.

Mas, diferente das boas estratégias indiretas, ...
ela não direciona a prova para uma conclusão específica.

Conclusão: é fácil se perder usando esta estratégia!!!

Parte 2

Redução ao Absurdo na LC

Redução ao Absurdo na LC

Na LC, a redução ao absurdo é classificada em dois tipos, de acordo com a conclusão a ser demonstrada:

- A conclusão é uma negação: $\neg\psi$.

- A conclusão não é uma negação.

Método de redução ao absurdo intuicionista

Para demonstrar uma negação, basta supor a sentença negada e demonstrar uma contradição.

$$\text{Se } \frac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \varphi\end{array}}{\psi \wedge (\neg\psi)}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\neg\varphi}.$$

Esta estratégia indireta também é chamada de Introdução do $\neg$.

Exemplício 1

Apresente uma demonstração indireta da validade do argumento a seguir, usando o método da redução ao absurdo intuicionista.

$$\begin{array}{l} a \lor b \\ c \to \neg a \\ \neg b \lor d \\ d \to \neg c \\ \hline \neg c \end{array}$$

Agora, apresente uma demonstração direta da validade do mesmo argumento.

Método de redução ao absurdo clássico

Para demonstrar uma fórmula qualquer, basta supor a sua negação e demonstrar uma contradição.

$$\text{Se } \frac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \neg\varphi\end{array}}{\psi \wedge (\neg\psi)}, \text{ então } \frac{\Sigma}{\varphi}.$$

Esta estratégia indireta é chamada, simplesmente, de Redução ao Absurdo.

Observe que a redução ao absurdo clássica engloba a redução ao absurdo intuicionista.

Exemplício 2

Apresente uma demonstração indireta da validade do argumento a seguir, usando o método de redução ao absurdo clássico.

$$\begin{array}{l} a \to (b \to c) \\ c \to \neg d \\ \neg e \leftrightarrow d \\ a \wedge b \\ \hline e \end{array}$$

Agora, apresente uma demonstração direta da validade do mesmo argumento.

Parte 3

Conjuntos inconsistentes na LC

Revisando RA

A ideia básica do método de redução ao absurdo é mostrar que podemos demonstrar uma contradição, a partir das premissas dadas, em conjunto com a negação da conclusão.

Definição. Seja $\Sigma \subseteq \mathrm{FLC}$.
Dizemos que Σ é **inconsistente** se existe $\varphi \in \mathrm{FLC}$, tal que podemos demonstrar $\varphi \wedge \neg\varphi$ a partir de Σ.

Assim, podemos dizer que a ideia básica do método de redução ao absurdo é mostrar que o conjunto formado pelas premissas e a negação da conclusão é inconsistente.

Conjuntos inconsistentes

Mas, conjuntos inconsistentes de sentenças ou fórmulas também aparecerem em muitas outras situações.

Exemplo 5

Ao ouvir as informações, ditas por um amigo:

> *Eu sei que o contrato é legítimo e que Sebastião é honesto.*
> *Por outro lado, me disseram que Sebastião vai a falência se ele é honesto.*
> *E que a única maneira de ele não ir à falência é o banco lhe emprestar dinheiro.*
> *Mas, acabei de saber que o banco vai emprestar o dinheiro.*

O irmão de Sebastião disse: Isso está estranho!?!?

Confirme o que o irmão de Sebastião sentiu...

Exercício 1

Construir demonstrações indiretas para os seguintes argumentos:

(i)
$$\begin{array}{l} a \to (b \to c) \\ \neg a \to (d \wedge \neg e) \\ (a \wedge b) \to \neg c \\ d \to (f \vee g) \\ \neg b \to (g \to h) \\ e \vee h \vee \neg g \\ \hline g \to h \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{l} b \to a \\ \neg a \vee c \\ c \to (d \vee e) \\ d \to (f \wedge \neg b) \\ e \to (\neg a \wedge f) \\ f \to a \\ (\neg b \vee g) \to (h \wedge i) \\ h \to b \\ \hline h \wedge \neg h \end{array}$$

Exercício 2

Utilizando RA, construa demonstrações para os seguintes argumentos válidos:

(i) $\dfrac{\neg(p \wedge q)}{\neg p \vee \neg q}$ (ii) $\dfrac{\neg p \vee \neg q}{\neg(p \wedge q)}$

(iii) $\dfrac{\neg(p \vee q)}{\neg p \wedge \neg q}$ (iv) $\dfrac{\neg p \wedge \neg q}{\neg(p \vee q)}$

Parte 3

Exercícios

Exercícios

Lista de Exercícios – Aula 13

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*

GAN-IME-UFF

Exercício 1 Mostre que os seguintes argumento são válidos: (a) usando o Método de Redução ao Absurdo; (b) fazendo uma demonstração direta.

1. Lógica é fácil ou os estudantes não gostam dela. Se Matemática é fácil, Lógica não é fácil. Deste modo, se os estudantes gostam de Lógica, Matemática não é fácil.

2. João e Ricardo têm a mesma idade ou João é mais velho que Ricardo. Se joão e Ricardo têm a mesma idade, Célia e João não têm a mesma idade. Mas se João é mais velho que Ricardo, também é mais velho que Célia. Assim, Célia e João não têm a mesma idade ou João é mais velho que Célia.

Exercício 2 (a) Mostre que os seguintes conjuntos são consistentes, determinando uma interpretação na qual todos os enunciados são V.

1. Se João é o assassino, estava no quarto da vítima e não saiu antes das nove. De fato, ele estava no quarto da vítima. Mas se ele saiu antes das nove, o porteiro o viu saindo. E não é o caso que: o porteiro o viu saindo ou que ele é o assassino.

2. O contrato será cumprido se, e somente se, o dinheiro for depositado. Mas, isto só vai acontecer quando, e somente quando, o pagamento for efetuado. E a conta ter dinheiro suficiente é necessario e suficiente para o contrato ser cumprido. Além disso, o pagamento só será efetuado quando o contrato for cumprido, e vice-versa.

(b) Tente transformar a técnica que você usou para resolver os itens 1 e 2 em um procedimento geral para resolver o problema de apresentar uma interpretação para um conjunto de enunciados na qual todos eles são V.

Argumentos e validade de argumentos na Lógica dos Conectivos

Petrucio Viana & Renata de Freitas

IME, UFF

21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Razões e opiniões

Opiniões, razões e consequência semântica

Vamos, agora, estudar uma conexão fundamental entre a noção de consequência semântica (finitária) e o ato cotidiano de termos opiniões e apresentarmos razões que sustentam as nossas opiniões.

Com isto, estenderemos as aplicações da Lógica — para além da equivalência e da consequência — entrando no que pode ser considerado o campo mais importante da Lógica: o estudo da validade de argumentos do "mundo real".

Opiniões

A maior parte das nossas atividades e decisões envolvem opiniões as quais consideramos corretas.

(a) Alguns professores dizem que aprender Lógica é uma das condições necessárias para uma boa formação dos estudantes que se dedicam a disciplinas que envolvem conteúdos matemáticos.

(b) Já outros dizem que, para ser um bom estudante nestas disciplinas, não é necessário aprender Lógica.

Razões

De uma maneira geral, opiniões estão sujeitas à crítica racional, isto é, opiniões podem ser examinadas à luz das razões que as justificam.

(a) Questionados sobre o porquê de sustentarem esta opinião, os partidários da lógica, usualmente, respondem:

A principal atividade executada pelos estudantes de disciplinas que envolvem conteúdo matemático é a justificativa formal das suas conclusões. A Lógica estuda os métodos utilizados na justificativa formal de conclusões. Compreender bem os métodos que utilizamos quando executamos nossas tarefas profissionais é dever de todo bom profissional.

Razões

(b) Já os que não consideram a Lógica necessária, dizem:

> *A Lógica estuda os métodos utilizados na justificativa formal de conclusões. Para ser um bom profissional não é necessário que saibamos como os métodos que utilizamos funcionam. Mas, sim, que saibamos utilizá-los bem.*

Quando justificamos uma opinião, as razões utilizadas podem ser boas ou não. Isto é, algumas razões de fato justificam uma opinião e outras não.

Argumentos

Quando as razões e as opiniões são expressas por sentenças e estudamos as relações entre estas sentenças, estamos avaliando o argumento que foi produzido para explicitar, em cada caso, as razões utilizadas na justificativa das opiniões.

$$\begin{tikzcd}
\text{razão 1} \arrow[dr, Rightarrow] & \text{razão 2} \arrow[d, Rightarrow] & \cdots & \text{razão n} \arrow[dll, Rightarrow] \\
& \text{opinião} & &
\end{tikzcd}$$

Explicitando argumentos

Para examinar e entender um argumento, precisamos distinguir claramente quais são as razões e qual é a opinião que elas sustentam.

(a) *A principal atividade executada pelos estudantes de disciplinas de conteúdo matemático é a justificativa formal das suas conclusões.*
A Lógica estuda os métodos utilizados na justificação formal de conclusões.
Compreender bem os métodos que utilizamos quando executamos nossas tarefas profissionais é dever de todo bom profissional.
Logo, todo estudante que se dedica a disciplinas de conteúdo matemático deve aprender Lógica.

Explicitando argumentos

Para examinar e entender um argumento, precisamos distinguir claramente quais são as razões e qual é a opinião que elas sustentam.

(b) *A lógica estuda os métodos utilizados na justificação formal de conclusões.*
Para ser um bom profissional não é necessário que saibamos como os métodos que utilizamos funcionam.
Para ser um bom proficional é suficiente que saibamos utilizar bem os métodos, quando executamos nossa atividade.
Assim, nem todo estudante que se dedica a disciplinas de conteúdo matemático deve aprender lógica.

Parte 2

Argumentos

Argumentos

Num sentido bem amplo, a Lógica pode ser vista como o estudo das relações entre opiniões e razões.

Assim, um dos pontos centrais da Lógica é o estudo de sentenças e argumentos.

Definição. Um **argumento** é uma sequência finita de sentenças, em que uma é considerada como conclusão e as demais são consideradas como premissas.

As premissas de um argumento são consideradas como justificativas para a sua conclusão.

Argumentos

(a) *Sócrates é homem.*
Se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal.
Logo, *Sócrates é mortal.*

(b) *Sócrates é mortal.*
Se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal.
Daí, *Sócrates é homem.*

Argumentos

(c) *Marley é homem.*
Se Marley é homem, então Marley é mortal.
Assim, *Marley é mortal.*

(d) *Sócrates é bípede.*
Se Sócrates voa, então Sócrates é bípede.
Portanto, *Sócrates voa.*

Cuidado!

Um argumento é uma sequência de sentenças, mas nem toda sequência de sentenças é um argumento.

De fato, de acordo com a definição, para ser um argumento, uma sequência de sentenças deve:

- ser finita;
- ter ao menos duas sentenças;
- ter exatamente uma das sentenças destacada como conclusão.

Não é argumento 1

Professores que fazem pesquisa não gostam de ensinar. Renata é uma professora que gosta de ensinar. Existem professores que não fazem pesquisa.

<u>Não está indicado explicitamente</u> na sequência qual das sentenças é a conclusão.

Não é argumento 2

Se a função seno é derivável e ela ser derivável implica em que ela é contínua, então a função seno é contínua.

Apesar das aparências, temos apenas uma única sentença, ou seja, uma sequência com um único elemento.

É uma implicação com antecedente e consequente e não um argumento com premissas e conclusão.

Não é argumento 3

1 é um número natural e é positivo. 2 é um número natural e é positivo. 3 é um número natural e é positivo. 4 é um número natural e é positivo. ... Logo, todo número natural é positivo.

É uma sequência de sentenças, possui premissas e conclusão destacadas, mas não é finita, como as reticências indicam.

Destacando a conclusão

Para destacar a conclusão de um argumento, usualmente, utilizamos uma frase conclusiva.

Nos argumentos, usualmente, as sentenças que sucedem frases conclusivas como

logo,

daí,

consequentemente,

deste modo,

assim,

são as conclusões. As demais são premissas.

Destacando a conclusão

Nem sempre a conclusão ocorre no final do argumento e, nem sempre, ela ocorre em conjunto com um frase conclusiva.

(a) *Se Renata faz pesquisa, ela gosta de ensinar.*
Renata não gosta de ensinar.
Renata não faz pesquisa.

Esta sequência não contém uma indicação explícita de qual das sentenças é a conclusão.

Porém, ela pode ser considerada como um argumento, pois uma leitura cuidadosa mostra que a última sentença é a conclusão e as duas primeiras são as premissas.

Destacando a conclusão

(b) *A terra é redonda.*
Sabemos disso porque durante um eclipse lunar a terra projeta uma sombra na lua.
E a sombra é arredondada.

Esta sequência deve ser considerada como um argumento.

A conclusão ocorre no início. Ela está especificada pela ocorrência da frase

sabemos disso porque

que a separa das outras informações que devem ser consideradas como premissas.

Destacando a conclusão

Uma maneira mais adequada de escrever o argumento:

Durante um eclipse lunar a terra projeta uma sombra na lua.
A sombra é arredondada.
Logo, a terra é redonda.

Exercício 1

Determine quais das sequências de frases abaixo são argumentos. Em caso afirmativo, reescreva o argumento de maneira mais adequada, colocando a conclusão no final, após uma frase conclusiva.

(i) *Se todos os homens são mortais, Sócrates é mortal se é homem.*

(ii) *João é um intelectual. Concluo isso, pois João é fomado em Filosofia. Além disso, João tem um doutorado em Ciência Política.*

(iii) *Eu me chamo Luciana. Recebi esse nome pois vovô se chama Lúcio. E vovó se chama Ana.*

Exercício 1

(iv) *Não é possível haver vida em outros planetas, dado que nunca se obteve uma prova concreta de que há vida extraterrena.*

(v) 2 *é primo e* 3 *é um primo maior do que* 2*.* 3 *é primo e* 5 *é um primo maior do que* 3*.* 5 *é primo e* 7 *é um primo maior do que* 5*.* 7 *é primo e* 11 *é um primo maior do que* 7*. . . . Deste modo, podemos concluir que, para todo primo existe um primo maior.*

Parte 3

Argumentos bons e ruins

Para que servem os argumentos

Em geral, utilizamos um argumento quando estamos interessados em estabelecer (ou provar, ou justificar, ou garantir) a verdade de uma determinada sentença.

Assim, nos apoiamos sobre determinadas bases (as premissas), de modo que o que queremos provar (a conclusão) tenha a sua verdade assentada sobre a verdade das premissas.

Argumentos bons e ruins

Existem casos em que as premissas realmente justificam a conclusão e outros em que isto não acontece.

Um argumento é bom quando suas premissas são suficientes para garantir a conclusão.

Um argumento é ruim quando suas premissas não são suficientes para garantir a conclusão.

Argumento bom 1

Sócrates é homem.
Se Sócrates é homem, então Sócrates é mortal.
Logo, Sócrates é mortal.

Se admitimos que Sócrates é homem (o que é verdadeiro) e que se ele é homem, então ele é mortal (o que é verdadeiro), não há outra possibilidade, temos que concluir que Sócrates é mortal (o que é verdadeiro).

Aqui, passamos de premissas V e V para conclusão V.

Argumento bom 2

Paulo Coelho é mulher.
Se Paulo Coelho é mulher, então ele é escritor.
Assim, Paulo Coelho é escritor.

Se admitimos que Paulo Coelho é mulher (o que é falso) e que se ele é mulher, então ele é escritor, (o que é verdadeiro) temos que concluir que Paulo Coelho é escritor (o que é verdadeiro).

Aqui, passamos de premissas F e V para conclusão V.

Argumento bom 3

Todos os homens são carecas.
Paola Oliveira é homem.
Daí, Paola Oliveira é careca.

Se admitimos que todos os homens são carecas (o que é falso) e
que Paola Oliveira é homem (o que é falso),
temos que concluir que Paola Oliveira é careca (o que é falso).

Aqui, passamos de premissas F e F para conclusão F.

Argumento ruim 1

Sócrates é mortal.
Todos os homens são mortais.
Consequentemente, Sócrates é homem.

Observe que é perfeitamente possível que Sócrates seja mortal, que todo homem seja mortal e que, mesmo assim, Sócrates não seja homem.

De fato, Sócrates poderia ser o nome de um cachorro, por exemplo.

Aqui, temos premissas V e V e conclusão V mas, mudando o conteúdo das sentenças, podemos passar para premissas V e V e conclusão F.

Argumento ruim 2

Petrúcio é homem.
Existem homens ricos.
Desta maneira, Petrúcio é rico.

Aqui, temos premissas V e V e conclusão F.

Parte 4

Validade de argumentos

Objetivo principal da lógica

Queremos reconhecer os argumento bons.

Assim, temos que:

1. definir precisamente quando um argumento é bom;
2. elaborar um critério mecânico que quando aplicado a um argumento decide se ele é bom ou não.

Raciocínio correto

Para isto vamos examinar o uso de argumentos como suporte para a justificativa de sentenças em duas circunstâncias importantes.

(1) As premissas sobre as quais nos baseamos são, de fato, verdadeiras e as premissas realmente apoiam a conclusão.

Assim, podemos concluir que a sentença que queremos estabelecer é verdadeira.

Neste caso, usar o argumento é o mesmo que estar certo! (possivelmente sem as explicações de por que estamos certos).

Raciocínio correto

Por exemplo, considere um advogado que, ao defender um cliente, usa o argumento:

> *Se a arma não está registrada no nome do meu cliente, então meu cliente não é culpado.*
> *A arma está registrada no nome de um certo Sr. George Pafúncio.*
> *Mas o meu cliente se chama Sr. Jorge Petrucio.*
> *Logo, meu cliente é inocente.*

É claro que o advogado sabe que todas as premissas são verdadeiras e, com isso, quer concluir que a conclusão também é verdadeira.

Raciocínio hipotético

(2) Não sabemos se as premissas sobre as quais nos baseamos são todas verdadeiras, mas temos razões para considerá-las como suportes para a conclusão — e as premissas realmente apoiam a conclusão.

Assim, nos apoiamos nas premissas de modo a fornecer uma base para a conclusão, tornando a conclusão "tão verdadeira" quanto as premissas.

Neste caso, usar o argumento não é o mesmo que estar certo!

Mas isto não impossibilita um bom uso do argumento.

Raciocínio hipotético

Por exemplo, considere, uma pessoa que defende a existência de Deus utilizando o argumento:

Deus é um ser perfeito.
Um ser perfeito tem todas as qualidades.
A existência é uma qualidade.
Logo, Deus existe.

Observe que se admitimos que Deus é perfeito, que seres perfeitos têm todas as qualidades e que a existência é uma qualidade, temos que concluir que Deus existe.

Raciocínio hipotético

O argumento é bom.

Mas a pessoa não está provando que Deus existe, apenas mostrando, por exemplo, que Sua existência não é "menos verdadeira" que Sua perfeição.

Ou seja, que não podemos "passar" da sua perfeição para a Sua não existência (de supostamente V para F).

Critério fundamental

O fator determinante no uso de argumentos na justificativa de sentenças não é a verdade das suas premissas, mas sim o fato de que, se admitimos que as premissas são verdadeiras, temos que concluir que a conclusão também é verdadeira.

Se argumentar bem fosse o mesmo que estar certo, a ciência que estuda os argumentos, ou seja, a Lógica, deveria abarcar todo o conhecimento humano.

Aplicando o critério intuitivamente 1

Os números pares são apenas uma parte dos números naturais.
O todo tem mais elementos do que cada uma das suas partes.
Logo, existem mais números naturais do que números pares.

Se admitimos que ambas as premissas são verdadeiras,
temos que concluir que que existem mais números naturais que números pares.

Este é um bom argumento
Embora uma de suas premissas seja falsa!
Qual?

Aplicando o critério intuitivamente 2

> *Existe um número perfeito ímpar.*
> *Portanto, existe um número perfeito ímpar.*

Um número natural é **perfeito** se é igual a soma de seus divisores próprios. Por exemplo, $6 = 1 + 2 + 3$ é perfeito, mas $10 \neq 1 + 2 + 5$ não é.

Mas, independentemente do que consideremos como um número perfeito e do fato de que, até hoje, não sabermos se sua premissa (e sua conclusão) é verdadeira ou não, o argumento é bom.

<u>Se admitimos que</u> sua premissa é verdadeira,
<u>temos que concluir que</u> a conclusão também é verdadeira, já que ambas são idênticas.

Argumentos válidos

Chegamos, então, a noção mais importante da Lógica:

Definição. Um argumento é **válido** se, em qualquer contexto em que suas premissas são simultaneamente verdadeiras, a sua conclusão também é verdadeira.

Analogamente, um argumento é **inválido** se não é válido, isto é, se existe ao menos um contexto no qual as suas premissas são simultaneamente verdadeiras e a sua conclusão é falsa.

Argumentos válidos

Outras maneiras de dizer que um argumento é válido são:

1. A conclusão decorre necessariamente das premissas.
2. A verdade das premissas é suficiente para acarretar a verdade da conclusão.
3. A verdade da conclusão decorre necessariamente da verdade das premissas.
4. Supondo que as premissas sejam verdadeiras, podemos garantir que a conclusão também é verdadeira.

Exercício 2

Use o bom senso para:
(1) classificar as premisas e a conclusão de cada argumento abaixo como V ou F, nos contextos usuais em que elas são dadas;
(2) determinar se os argumentos são válidos ou não.

(i) *Se Rintintim é um peixe, ele é bípede. Rintintim não é um peixe. Logo, Rintintin não é bípede.*

(ii) *Se Rintintim é um peixe, ele é bípede. Rintintim não é bípede. Logo, Rintintin não é peixe.*

Exercício 2

(iii) *Todos os filotímicos são procrastinadores. Napoleão é procrastinador. Logo, Napoleão é filotímico.*

(iv) *Existem generais que provam teoremas. Napoleão é um general. Logo, Napoleão prova teoremas.*

Exercício 1

(v) *Todos os seres humanos são seres vivos. Todos os macacos são seres vivos. Logo, alguns macacos são seres humanos.*

(vi) *Todos os seres humanos são mamíferos. Todos os macacos são mamíferos. Nenhum macaco é um ser humano. Logo, nenhum ser humano é um macaco.*

Verdade e validade

Resolvendo os exercícios acima, chegamos à conclusão que a validade de um argumento não depende nem da veracidade das suas premissas e conclusão, nem do seu conteúdo.

Em outras palavras, a validade de um argumento não pode, em geral, ser determinada a partir dos valores de suas premissas e conclusão.

Verdade e invalidade

Por outro lado, se as premissas de um argumento são simultaneamente V e sua conclusão é F, podemos concluir que o argumento é inválido.

Neste caso, o próprio argumento mostra um contexto no qual as premissas são simultaneamente V e a conclusão é F.

Em outras palavras, a invalidade de um argumento pode, às vezes, ser determinada a partir dos valores de suas premissas e conclusão.

Parte 5

Validade de argumentos na LC

Validade e consequência semântica

Como verificar se um dado argumento é válido ou não?

Esta é uma questão espinhosa: a definição de validade envolve a noção de contexto. E a noção de contexto é, de maneira geral, difícil de especificar.

Porém, se o argumento é formado apenas por sentenças que consideramos como formadas por meio da aplicação de conectivos lógicos, podemos identificar a noção de contexto com a de interpretação e aplicar a noção de consequência semântica para resolver a questão.

Exemplo 1

Considere as seguintes sentenças, tomadas, respectivamente como duas premissas e uma conclusão:

> *Se Tiririca é cantor, Xuxa é cantora. Xuxa não é. Logo, Tiririca também não é.*

Este argumento é válido ou não?

Exemplo 1

Legenda:

$$\begin{array}{lcl} t & : & \textit{Tiririca é cantor.} \\ x & : & \textit{Xuxa é cantora.} \end{array}$$

Simbolização:

$$\begin{array}{l} t \to x \\ \neg x \\ \hline \neg t \end{array}$$

Este argumento é um passo lógico e, portanto, é válido.

Exemplo 2

Considere as seguintes sentenças, tomadas, respectivamente como duas premissas e uma conclusão:

> *Se Joel não tem* 18 *anos, não tem carteira de motorista. Joel não tem carteira de motorista. Assim, podemos concluir que Joel não tem 18 anos.*

Este argumento é válido ou não?

Exemplo 2

Legenda:

d : *Joel tem* 18 *anos.*
c : *Joel tem carteira de motorista.*

Simbolização:

$$\begin{array}{l} \neg d \to \neg c \\ \neg c \\ \hline \neg d \end{array}$$

Este argumento não é um passo lógico e, portanto, é inválido.

Tomando $d : V$ e $c : F$, temos premissas V e conclusão F.

Exemplo 3

Considere as seguintes sentenças, tomadas, respectivamente como duas premissas e uma conclusão:

Se $1+1=2$, *então* $(1+1)+1=3$. *Se* $(1+1)+1=3$, *então* $(1+1)+2=4$. *Logo*, $(1+1)+2=4$.

Este argumento é válido ou não?

Exemplo 3

Legenda:

$$\begin{array}{lcl} d & : & 1+1=2. \\ t & : & (1+1)+1=3. \\ q & : & (1+1)+2=4. \end{array}$$

Simbolização:

$$\begin{array}{l} d \rightarrow t \\ t \rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Este argumento não é um passo lógico e, portanto, é inválido.

Tomando $d : F$, $t : F$ e $q : F$, temos premissas V e conclusão F.

Exemplo 4

Considere as seguintes sentenças, tomadas, respectivamente como duas premissas e uma conclusão:

> *Se chove, a rua fica molhada. Se a rua fica molhada, os carros derrapam. Chove. Portanto, os carros derrapam.*

Este argumento é válido ou não?

Exemplo 4

Legenda:

c : *Chove.*
m : *A rua fica molhada.*
d : *Os carros derrapam.*

Simbolização:

$$\begin{array}{l} c \to m \\ m \to d \\ c \\ \hline d \end{array}$$

Este argumento é um passo lógico e, portanto, é válido.

Podemos apresentar uma demonstração da sua validade em 5 passos!

Exemplo 5

Considere as seguintes sentenças, tomadas, respectivamente como duas premissas e uma conclusão:

> *Djalma fala inglês ou não é admitido na empresa. Djalma é admitido na empresa. Portanto, Djalma fala inglês.*

Este argumento é válido ou não?

Exemplo 5

Legenda:

f : *Djalma fala inglês.*
a : *Djalma é admitido na empresa.*

Simbolização:

$$\begin{array}{l} f \vee \neg a \\ a \\ \hline f \end{array}$$

Este argumento é um passo lógico e, portanto, é válido.

Exemplo 6

Considere as seguintes sentenças, tomadas, respectivamente como duas premissas e uma conclusão:

> *Se a é racional, então a é real. Se a é real, então a é complexo. a não é racional. Portanto, a não é complexo.*

A conclusão decorre das premissas ou não?

Exemplo 6

Legenda:

$$\begin{array}{lcl} q & : & \textit{a é racional.} \\ r & : & \textit{a é real.} \\ c & : & \textit{a é complexo.} \end{array}$$

Simbolização:

$$\begin{array}{l} q \rightarrow r \\ r \rightarrow c \\ \neg q \\ \hline \neg c \end{array}$$

Este argumento não é um passo lógico e, portanto, é inválido.

Tomando $q : F$, $r : V$ e $c : V$, temos premissas V e conclusão F.

Validade na LC

Em resumo, temos o seguinte procedimento para a determinação da validade de argumentos cujas premissas e conclusão só possuem ocorrências de conectivos lógicos:

1. Simbolizar o argumento na LC.
2. Verificar se a conclusão é uma consequência semântica finitária das premissas na LC.
3. Em caso afirmativo, o argumento é válido, pois em toda interpretação na qual suas premissas são V a conclusão também é V.
4. Em caso negativo, o argumento é inválido e, quando isto acontece, exibimos uma interpretação na qual as premissas do argumento são simultaneamente V e sua conclusão é F.

Validade na LC

É um consenso que, ao aplicarmos o procedimento acima, se determinamos que o argumento é válido — ou seja, se o argumento é válido na LC —, então ele é, de fato, válido.

Porém, existem argumentos intuitivamente válidos cuja determinação da validade está fora do escopo deste procedimento.

Isto se dá, principalmente, nos casos em, que as premissas ou a conclusão do argumento possuem ocorrências de partículas que não são consideradas como conectivos lógicos.

Veremos exemplos desta situação mais adiante.

Parte 6

Exercícios

Exercício 2

Verifique a validade dos seguintes argumentos na LC:

(a) *Se o cão está latindo, o cão não está na casa. Se o cão está na casa, há alguém em frente à porta se o cão está latindo. O cão está latindo, pois o cão está na casa. Logo, não acontece que o cão esteja na casa ou esteja latindo.*

(b) *Se o cão está latindo, o cão está na casa. Se o cão está na casa, então o cão não está latindo ou há alguém em frente à porta. Na realidade, o cão está latindo. Logo, não é o caso que há alguém em frente à porta.*

Exercício 3

Usando a noção de validade na LC, resolva o seguinte problema proposto na aula *Lógica Formal e Principais Sistemas Lógicos*:

Temos as seguintes informações:

Sócrates está disposto a visitar Platão, se Platão está disposto a visitá-lo. Porém, Platão não está disposto a visitar Sócrates, se Sócrates está disposto a visitá-lo. Mas, Platão está disposto a visitar Sócrates, se Sócrates não está disposto a visitá-lo.

Podemos concluir que Sócrates está disposto a visitar Platão?

Mais exercícios

Lista de Exercícios – Aula 14

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*

GAN-IME-UFF

Exercício 1 Verificar a validade em LC:

(i) Oscar e Virgínia assistem as aulas pois Jorge assiste. Virgínia assiste as aulas. Logo, Jorge assiste as aulas ou Oscar não assiste.

(ii) Se $x < 0$, $f(x) = x$. Mas, como não é o caso que $x < 0$, $f(x) = 5$. Temos, então, que $f(x) = x$ ou 5.

(iii) Se Virgínia assiste as aulas, então Joana assiste as aulas somente se Jorge e Míriam assistem. Virgínia e Joana assistem as aulas. Daí, Jorge e Míriam também.

(iv) Uma condição necessária para Oscar frequentar as aulas é que Míriam e Virgínia frequentem. Uma condição suficiente para Virgínia frequentar as aulas é que Jorge frequente. Entretanto, Jorge não frequenta as aulas, a menos que Míriam frequente. E Virgínia frequenta as aulas somente se Oscar frequenta. Daí, Virgínia frequenta as aulas quando, e exatamente quando, Oscar frequenta.

(v) Uma condição necessária para que f tenha um máximo no intervalo $[a, b]$ é que f seja contínua em $[a, b]$ e definida em a. Uma condição necessária, que também é suficiente, para que f tenha um máximo em $[a, b]$ é que exista um ponto c entre a e b, tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Existe um ponto c entre a e b, tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Logo, f é contínua em $[a, b]$ e é definida em a.

Árvores de Avaliação na Lógica dos Conectivos

Renata de Freitas & Petrucio Viana

IME-UFF

21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

A necessidade das árvore de avaliação em LC

Tabelas de avaliação

Na Aula 5, vimos que a toda fórmula φ da LC — formada por n símbolos para sentenças — corresponde uma tabela de avaliação $T[\varphi]$ — formada por 2^n linhas e $n+1$ colunas preenchidas com V ou F — que:

1. lista todas as interptretações de φ;
2. determina o valor que φ possui em cada uma das suas interpretações.

No Exercício 6 da Lista de Exercício da Aula 5, vimos que, reciprocamente, a toda tabela T' — formada por 2^n linhas e $n+1$ colunas preenchidas com V ou F — corresponde uma fórmula φ da LC — formada por n símbolos para sentenças — tal que $T[\varphi] = T'$.

Tabelas de avaliação

Por descrever completamente a semântica de φ — em termos dos valores lógicos V e F — $T[\varphi]$ pode ser usada na resolução de diversos problemas que envolvem aspectos semânticos de φ.

Em particular, problemas que envolvem:

- equivalência,
- negação,

  e
- consequência semântica.

Porém, por possuirem um *número exponencial de linhas* (2^n), as tabelas de avaliação se mostram como um poderoso, porém ineficiente, mecanismo para a resolução de problemas lógicos.

Alternativas para tabelas

Por estas razões, nas Aulas 7, 10, 11, 12 e 13, elaboramos dois métodos alternativos para a resolução dos problemas da equivalência, da negação e da consequência na LC:
sequências de equivalências e demonstrações.

Como ilustramos — mas não vamos demonstrar estes importante fatos aqui — os dois métodos apresentados resolvem os problemas, quando a resposta para os problemas é positiva.

Ou seja:

- Se φ e ψ são equivalentes é sempre possível transformar φ em ψ por meio de uma sequência de equivalências.
- Se ψ é consequência de φ é sempre possível exibir uma demonstração de ψ a partir de φ.

Alternativas para tabelas

Por outro lado, o que queremos salientar é que os dois métodos apresentados não parecem aplicáveis, pelo menos de maneira direta, quando os problemas possuem respostas negativas.

Ou seja:

- Se φ e ψ não são equivalentes, não podemos exibir uma sequência de equivalências para mostrar isto.
- Se ψ não é consequência semântica de φ, não podemos exibir uma demonstração para mostrar isto.

Alternativa para tabelas

Nestes casos, o melhor que podemos fazer — até o momento — é, por tentativa e erro, exibir uma interpretação que:

no caso da não equivalência, mostra que as fórmulas podem possuir valores opostos;

no caso da não consequência, mostra que as premissas podem ser V e a conclusão F.

Uma nova alternativa para tabelas

Vamos, agora, elaborar um terceiro método que, à primeira vista, é mais adequado para a resoluçao de todos estes problemas.

E que os resolve tanto do lado positivo quanto do negativo.

Este método será baseado na ideia de árvores de avaliação que são uma alternativa para as tabelas de avaliação e que, à primeira vista, são mais econômicas que as tabelas.

Parte 2

A ideia de árvore de avaliação em LC

A ideia de árvore de avalição em LC

Vamos introduzir, desenvolver e aperfeiçoar a ideia de árvore de avaliação através do exame de vários simples.

Para construir uma tabela de avaliação, listamos todas as interpretações a calculamos o valor da fórmula em cada uma delas.

Dualmente, para construir uma árvore de avaliação, atribuímos um valor à fórmula e calculamos as interpretações nas quais a fórmula possui aquele valor.

Exemplo 1

Consideremos a fórmula $p \to p$.

Em quais interpretações ela é V?
E em quais ela é F?

Podemos responder a estas perguntas analisando os casos em que $p \to p$ é V ...

Exemplo 1(a): $p \to p : V$?

Supomos que $p \to p : V$.

Pela tabela do $\to$, temos dois casos: $p : F$ ou $p : V$.

Esta é a única informação que podemos obter a partir de $p \to p : V$.

Como $p \to p$ possui apenas duas interpretações, podemos concluir que ela é sempre V.

Assim, podemos também concluir que ela nunca é F.

Exemplo 1(a): $p \to p : V$?

Tudo isso pode ser resumido em um diagrama construído da maneira a seguir.

Incialmente, dispomos a **fórmula rotulada** com V:

$$p \to p : V$$

Depois, acrescentamos uma **bifurcação** que exibe as duas possibilidades para o valor de p:

$$p \to p : V$$

$$p : F \qquad\qquad p : V$$

Exemplo 1(a): $p \to p : V$?

Depois **marcamos** a fórmula rotulada utilizada com $\surd$ para indicar que ela foi **esgotada**:

$$
\begin{array}{ccc}
 & p \to p : V \ \surd & \\
 & \diagup \quad \diagdown & \\
p : F & & p : V
\end{array}
$$

Finalmente, marcamos cada **ramo** com $\downarrow$ para indicar que nenhuma **contradição** ocorre naquele ramo:

$$
\begin{array}{ccc}
 & p \to p : V \ \surd & \\
 & \diagup \quad \diagdown & \\
p : F & & p : V \\
\downarrow & & \downarrow
\end{array}
$$

A necessidade destas marcas ficará evidente quando os exemplos se tornarem mais complexos.

Exemplo 1(a): $p \to p : V$?

Em resumo, a **árvore positiva de avaliação** de $p \to p$ pode ser construída pelos seguintes passos:

$$p \to p : V$$

Exemplo 1

Em resumo, a **árvore positiva de avaliação** de $p \to p$ pode ser construída pelos seguintes passos:

$$\begin{array}{ccc} & p \to p : V & \\ p : F & & p : V \end{array}$$

Exemplo 1

Em resumo, a **árvore positiva de avaliação** de $p \to p$ pode ser construída pelos seguintes passos:

$$p \to p : V \ \surd$$

$$p : F \qquad\qquad p : V$$

Exemplo 1

Em resumo, a **árvore positiva de avaliação** de $p \to p$ pode ser construída pelos seguintes passos:

$$\begin{array}{ccc} & p \to p : V \ \surd & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ p : F & & p : V \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Como todas as fórmulas moleculares rotuladas estão marcadas, a árvore está **saturada**.

Exemplo 1

Podemos chegar as mesmas repostas analisando os casos em que $p \to p$ é F ...

$p \to p : F$?

Pela tabela do $\to$, temos $p : V$ e $p : F$.

Esta é a única informação que podemos obter a partir de $p \to p : F$.

Mas, esta informação contradiz a definição de interpretação, segundo a qual cada símbolo para sentença assume somente um valor.

Como temos uma *contradição*, concluímos que $p \to p$ não pode ser F, ou seja, ela é sempre V.

Exemplo 1(b): $p \to p : F$?

Tudo isso pode ser resumido em um diagrama construído da maneira a seguir.

Incialmente, dispomos a fórmula rotulada com F:

$$p \to p : F$$

Depois, acrescentamos um ramo que exibe os valores de p, obtidos pela análise de $p \to p : F$:

$$\begin{array}{c} p \to p : F \\ p : V \\ p : F \end{array}$$

Exemplo 1(b): $p \to p : F$?

Depois *marcamos* a fórmula rotulada utilizada com $\surd$ para indicar que ela foi esgotada:

$$\begin{array}{c} p \to p : F \ \surd \\ p : V \\ p : F \end{array}$$

Finalmente, marcamos o único ramo com $\times$ para indicar que uma contradição ocorre no ramo:

$$\begin{array}{c} p \to p : F \ \surd \\ p : V \\ p : F \\ \times \end{array}$$

A necessidade desta última marca é evidente.

Exemplo 1(b): $p \to p : F$?

Em resumo, a **árvore negativa de avaliação** de $p \to p$ pode ser construída pelos seguintes passos:

$$p \to p : F$$

Exemplo 1

Em resumo, a **árvore negativa de avaliação** de $p \rightarrow p$ pode ser construída pelos seguintes passos:

$$p \rightarrow p : V$$
$$p : V$$
$$p : F$$

Exemplo 1

Em resumo, a **árvore negativa de avaliação** de $p \rightarrow p$ pode ser construída pelos seguintes passos:

$$
\begin{array}{c}
p \rightarrow p : V \ \surd \\
p : V \\
p : F
\end{array}
$$

Exemplo 1

Em resumo, a **árvore negativa de avaliação** de $p \to p$ pode ser construída pelos seguintes passos:

$$\begin{array}{c} p \to p : V \\ p : V \\ p : F \\ \times \end{array}$$

Como todas as fórmulas moleculares rotuladas estão marcadas, a árvore está saturada.

Exemplo 2

Consideremos a fórmula $(p \vee q) \rightarrow p$.

Em quais interpretações ela é V?
E em quais ela é F?

Podemos responder estas perguntas de duas maneiras:
(a) construindo a árvore positiva de avaliação ao examinarmos os casos em que a fórmula é V
ou, alternativamente,
(b) construindo a árvore negativa de avaliação ao examinarmos os casos em que a fórmula é F ...

Exemplo 2(a): $(p \lor q) \rightarrow p : V$?

Iniciamos a árvore com :

$$(p \lor q) \rightarrow p : V$$

Daí, temos $p \lor q : F$ ou $p : V$.

Exemplo 2(a): $(p \vee q) \rightarrow p : V$?

Bifurcamos a árvore, acrescentando esta informação:

$$(p \vee q) \rightarrow p : V$$

$$p \vee q : F \qquad\qquad p : V$$

Exemplo 2(a): $(p \vee q) \to p : V$?

Marcamos a fórmula rotulada esgotada com $\surd$:

$$
\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \to p : V \ \surd & \\
 & \diagup \quad \diagdown & \\
p \vee q : F & & p : V
\end{array}
$$

No *ramo esquerdo*, temos $p \vee q : F$.
Daí, temos $p : F$ e $q : F$.

Exemplo 2(a): $(p \vee q) \rightarrow p : V$?

Continuamos o ramo esquerdo acrescentando esta informação:

$$
\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \rightarrow p : V \;\checkmark & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
p \vee q : F & & p : V \\
p : F & & \\
q : F & &
\end{array}
$$

Exemplo 2(a): $(p \vee q) \rightarrow p : V$?

Marcamos a fórmula rotulada esgotada com $\surd$:

$$
\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \rightarrow p : V \ \surd & \\
 & \diagup \quad \diagdown & \\
p \vee q : F \ \surd & & p : V \\
p : F & & \\
q : F & &
\end{array}
$$

Todas as **fórmulas rotuladas moleculares** estão marcadas e em cada ramo não há contradição.

Exemplo 2(a): $(p \vee q) \rightarrow p : V$?

Marcamos cada ramo **aberto** com $\downarrow$:

$$\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \rightarrow p : V \ \surd & \\
 & \diagup \quad \diagdown & \\
p \vee q : F \ \surd & & p : V \\
p : F & & \downarrow \\
q : F & & \\
\downarrow & &
\end{array}$$

A árvore está saturada.

O ramo da esquerda informa que $(p \vee q) \rightarrow p : V$ quando $p : F$ e $q : F$.

O ramo da direita informa que $(p \vee q) \rightarrow p : V$ quando $p : V$, independente do valor de q.

Exemplo 2(a): $(p \vee q) \rightarrow p : V$?

Em resumo:

$$(p \vee q) \rightarrow p : V$$

Exemplo 2(a): $(p \vee q) \rightarrow p : V$?

Em resumo:

$$
\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \rightarrow p : V & \\
 & / \quad \backslash & \\
p \vee q : F & & p : V
\end{array}
$$

Exemplo 2(a): $(p \vee q) \to p : V$?

Em resumo:

$$(p \vee q) \to p : V \ \surd$$

$$p \vee q : F \qquad\qquad p : V$$

Exemplo 2(a): $(p \vee q) \rightarrow p : V$?

Em resumo:

$$(p \vee q) \rightarrow p : V \ \surd$$

$$\begin{array}{cc} p \vee q : F & p : V \\ p : F & \\ q : F & \end{array}$$

Exemplo 2(a): $(p \vee q) \rightarrow p : V$?

Em resumo:

$$
\begin{array}{ccc}
& (p \vee q) \rightarrow p : V \ \checkmark & \\
& \diagup \quad \diagdown & \\
p \vee q : F \ \checkmark & & p : V \\
p : F & & \\
q : F & &
\end{array}
$$

Exemplo 2(a): $(p \vee q) \rightarrow p : V$?

Em resumo:

$$
\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \rightarrow p : V \ \surd & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
p \vee q : F \ \surd & & p : V \\
p : F & & \downarrow \\
q : F & & \\
\downarrow & &
\end{array}
$$

Exemplo 2(a): $(p \vee q) \rightarrow p : V$?

Em resumo:

$$
\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \rightarrow p : V \ \surd & \\
 & \diagup \quad \diagdown & \\
p \vee q : F \ \surd & & p : V \\
p : F & & \downarrow \\
q : F & & \\
\downarrow & &
\end{array}
$$

A árvore saturada informa que $(p \vee q) \rightarrow p$ é V em exatamente 3 interpretações:
$p : F$ e $q : F$,
$p : V$ e $q : V$,
$p : V$ e $q : F$.

A árvore saturada informa que $(p \vee q) \rightarrow p$ é F em exatamente 1 interpretação:
$p : F$ e $q : V$.

Exemplo 2(b): $(p \vee q) \rightarrow p : F$?

Podemos chegar às mesmas repostas analisando os casos em que $(p \vee q) \rightarrow p$ é F ...

Iniciamos a árvore com :

$$(p \vee q) \rightarrow p : F$$

Daí, temos $p \vee q : V$ e $p : F$.

Exemplo 2(b): $(p \vee q) \rightarrow p : F$?

Continuamos a árvore com esta informação e marcamos a fórmula rotulada esgotada:

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow p : F \ \surd \\ p \vee q : V \\ p : F \end{array}$$

No único ramo, temos $p \vee q : V$.
Daí, temos $p : V$ ou $q : V$.

Exemplo 2(b): $(p \vee q) \rightarrow p : F$?

Bifurcamos a árvore com esta informação e marcamos a fórmula rotulada esgotada:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \rightarrow p : F \ \checkmark \\
p \vee q : V \ \checkmark \\
p : F \\
\swarrow \quad \searrow \\
p : V \qquad q : V
\end{array}
$$

A árvore está saturada.

No ramo da esquerda há contradição e no ramo da direita não há contradição.

Exemplo 2(b): $(p \vee q) \rightarrow p : F$?

Marcamos o **ramo fechado** com $\times$ e o ramo aberto com $\downarrow$:

$$(p \vee q) \rightarrow p : F \ \surd$$
$$p \vee q : V \ \surd$$
$$p : F$$
$$\begin{array}{ccc} p : V & \quad & q : V \\ \times & & \downarrow \end{array}$$

A árvore saturada informa que $(p \vee q) \rightarrow p$ é F em 1 interpretação: $p : F$ e $q : V$.

Assim, a árvore saturada também informa que $(p \vee q) \rightarrow p$ é V em 3 interpretações: $p : V$ e $q : V$, $p : V$ e $q : F$ e $p : F$ e $q : F$.

Exemplo 3(a): $p \rightarrow (q \rightarrow p) : V$?

Iniciamos com:

$$p \rightarrow (q \rightarrow p) : V$$

Exemplo 3(a): $p \to (q \to p) : V$?

Daí, como $p : F$ ou $q \to p : V$, bifurcamos o ramo:

$$\begin{array}{ccc} & p \to (q \to p) : V & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ p : F & & q \to p : V \end{array}$$

Exemplo 3(a): $p \to (q \to p) : V$?

Marcamos a fórmula rotulada esgotada:

$$p \to (q \to p) : V \ \surd$$

$$p : F \qquad\qquad q \to p : V$$

Exemplo 3(a): $p \to (q \to p) : V$?

No ramo direito, temos $q \to p : V$.
Daí, temos $q : F$ ou $p : V$ e bifurcamos o ramo direito:

$$p \to (q \to p) : V \ \surd$$

$$p : F \qquad\qquad q \to p : V$$

$$q : V \qquad\qquad p : F$$

Exemplo 3(a): $p \rightarrow (q \rightarrow p) : V$?

Marcamos a fórmula rotulada esgotada:

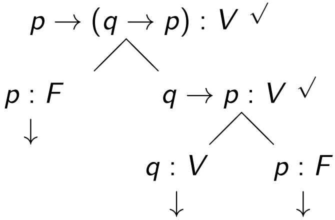
$$
\begin{array}{ccc}
 & p \rightarrow (q \rightarrow p) : V \; \surd & \\
p : F & & q \rightarrow p : V \; \surd \\
 & q : V & \quad p : F
\end{array}
$$

Exemplo 3(a): $p \rightarrow (q \rightarrow p) : V$?

A árvore está saturada.

Nenhum ramo contém uma contradição.

Marcamos todos os ramos abertos:



A árvore saturada informa que $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ é V quando $q : V$, independente do valor de p ou quando $p : F$, indendente do valor de q.

Exemplo 3(a): $p \to (q \to p) : V$?

Em resumo:

$$p \to (q \to p) : V \ \surd$$

$$p : F \qquad\qquad q \to p : V \ \surd$$

$$q : V \qquad\qquad p : F$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

A árvore saturada informa que $p \to (q \to p)$ é V em todas as suas 4 interpretações: $p : V$ e $q : V$, $p : F$ e $q : V$, $p : F$ e $q : V$ e $p : F$ e $q : V$.

Ou seja, $p \to (q \to p)$ é sempre V.

Exemplo 3(b): $p \rightarrow (q \rightarrow p) : F$?

Iniciamos com:

$$p \rightarrow (q \rightarrow p) : F$$

Exemplo 3(b): $\models p \to (q \to p) : F$?

Daí, como $p : V$ e $q \to p : F$, continuamos o ramo:

$$\begin{gathered} p \to (q \to p) : F \\ p : V \\ q \to p : F \end{gathered}$$

Exemplo 3(b): $p \to (q \to p) : F$?

Marcamos a fórmula rotulada esgotada:

$$p \to (q \to p) : F \ \surd$$
$$p : V$$
$$q \to p : F$$

Exemplo 3(b): $p \to (q \to p) : F$?

Daí, como $q : V$ e $p : F$, continuamos o ramo:

$$
\begin{array}{c}
p \to (q \to p) : F \;\checkmark \\
p : V \\
q \to p : F \\
q : V \\
p : F
\end{array}
$$

Exemplo 3(b): $p \to (q \to p) : F$?

Marcamos a fórmula rotulada esgotada:

$$\begin{array}{c} p \to (q \to p) : F \ \surd \\ p : V \\ q \to p : F \ \surd \\ q : V \\ p : F \end{array}$$

Exemplo 3(b): $p \to (q \to p) : F$?

A árvore está saturada.

O único ramo contém uma contradição.

Marcamos a contradição:

$$\begin{array}{c} p \to (q \to p) : F \ \surd \\ p : V \\ q \to p : F \ \surd \\ q : V \\ p : F \\ \times \end{array}$$

A árvore saturada informa que $p \to (q \to p)$ nunca é F, ou seja, é sempre V.

Exemplo 4(a): $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : V$

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : V$$

Exemplo 4(a): $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : V$

$$
\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : V \ \surd & \\
 & \diagup \quad \diagdown & \\
p \vee q : F & & p \wedge q : V
\end{array}
$$

Exemplo 4(a): $(p \vee q) \to (p \wedge q) : V$

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{(p \vee q) \to (p \wedge q) : V \ \surd} \\
\swarrow & & \searrow \\
p \vee q : F \ \surd & & p \wedge q : V \\
p : F & & \\
q : F & &
\end{array}
$$

Exemplo 4(a): $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : V$

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : V \ \surd \\
\begin{array}{cc}
p \vee q : F \ \surd & \quad p \wedge q : V \ \surd \\
p : F & \quad p : V \\
q : F & \quad q : V
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 4(a): $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : V$

$$
\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : V \ \surd & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
p \vee q : F \ \surd & & p \wedge q : V \ \surd \\
p : F & & p : V \\
q : F & & q : V \\
\downarrow & & \downarrow
\end{array}
$$

Exemplo 4(a): $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : V$

Em resumo:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : V \ \surd$$

$$\begin{array}{ccc} p \vee q : F \ \surd & & p \wedge q : V \ \surd \\ p : F & & p : V \\ q : F & & q : V \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ é V nas interpretações:
$p : F$ e $q : F$,
$p : V$ e $q : V$

$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ é F nas interpretações:
$p : V$ e $q : F$,
$p : F$ e $q : V$

Exemplo 4(b): $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F$

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F$$

Daí, temos $p \vee q : V$ e $p \wedge q : F$.

Exemplo 4(b): $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F$

Continuamos o ramo com esta informação e arcamos a fórmula rotulada esgotada:

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F \ \surd \\ p \vee q : V \\ p \wedge q : F \end{array}$$

Exemplo 4(b): $(p \vee q) \to (p \wedge q) : F$

Da primeira fórmula rotulada não marcada, temos $p : V$ ou $q : V$.

Bifurcamos o ramo para contemplar cada caso e marcamos a fórmula rotulada esgotada:

$$\begin{array}{c}
(p \vee q) \to (p \wedge q) : F \ \surd \\
p \vee q : V \ \surd \\
p \wedge q : F \\
\swarrow \qquad \searrow \\
p : V \qquad\qquad q : V
\end{array}$$

Exemplo 4(b): $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F$

Da primeira fórmula rotulada não marcada, temos $p : F$ ou $q : F$.

Bifurcamos o ramo para contemplar cada caso e marcamos a fórmula rotulada esgotada:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F \ \surd$$
$$p \vee q : V \ \surd$$
$$p \wedge q : F \ \surd$$
$$p : V \qquad\qquad q : V$$
$$p : F \quad q : F \qquad p : F \quad q : F$$

Observamos que a informação é transportada para todos os ramos abertos.

Exemplo 4(b): $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F$

A árvore está saturada.

Há contradição no **primeiro** e no **quarto** ramo.
Não há contradição nem no **segundo** nem no **terceiro** ramo.

Marcamos os ramos fechados e os ramos abertos:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) : F \ \surd \\
p \vee q : V \ \surd \\
p \wedge q : F \ \surd \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} p : V \\ \begin{array}{cc} p : F & q : F \\ \times & \downarrow \end{array} \end{array} &
\begin{array}{c} q : V \\ \begin{array}{cc} p : F & q : F \\ \downarrow & \times \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 4(b): $(p \vee q) \to (p \wedge q) : F$

Em resumo:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \to (p \wedge q) : F \ \checkmark \\
p \vee q : V \ \checkmark \\
p \wedge q : F \ \checkmark
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{2}{c}{p : V} & \multicolumn{2}{c}{q : V} \\
p : F & q : F & p : F & q : F \\
\times & \downarrow & \downarrow & \times
\end{array}
$$

$(p \vee q) \to (p \wedge q)$ é F nas interpretações: $p : V$ e $q : F$; $p : F$ e $q : V$.

$(p \vee q) \to (p \wedge q)$ é V nas interpretações: $p : V$ e $q : V$; $p : F$ e $q : F$.

Exercício 1

Parte 3

Classificação das fórmulas da LC

Classificação das fórmulas da LC

Cada fórmula φ da LC possui uma tabela de avaliação, $T[\varphi]$, e duas árvores de avaliação, uma positiva, $A^{+}[\varphi]$, e outra negativa,$A^{-}[\varphi]$ (mais adiante estas árvores são definidas com precisão).

Como ilustramos, a tabela e as árvores, cada uma delas, fornecem a mesma informação sobre o valor que a fórmula assume em cada uma das suas interpretações.

Classificação das fórmulas da LC

Como ilustramos, há:

1. fórmulas que possuem árvores positivas cujos ramos estão todos fechados
   (se e somente se suas árvores negativas possuem os ramos todos abertos);

2. fórmulas que possuem árvores positivas cujos ramos estão todos abertos
   (se e somente se suas árvores negativas possuem os ramos todos fechados);

3. fórmulas que possuem ávores positivas que possuem ramos abertos e, também, ramos fechados
   (se e somente se suas árvores negativas possuem ramos abertos e, também, ramos fechados).

Classificação das fórmulas da LC

Estas características correspondem, diretamente, a condições semelhantes sobre as tabelas das fórmulas.

Assim, há:

1. fórmulas cujas tabelas possuem somente ocorrências de V na última coluna;
2. fórmulas cujas tabelas possuem somente ocorrências de F na última coluna;
3. fórmulas cujas tabelas possuem pelo menos uma ocorrência de V e pelo menos uma ocorrência de F na última coluna.

Classificação das fórmulas da LC

Assim, cada fórmula φ da LC pode ser classificada, de acordo com sua tabela de avaliação $T[\varphi]$ — ou de acordo com suas árvores de avaliação $A^+[\varphi]$ e $A^-[\varphi]$ — em, pelo menos, três categorias.

De acordo com a última coluna de $T[\varphi]$, a fórmula φ pode ser classificada em exatamente uma das seguintes categorias:

- V em todas as interpretações,
- V em algumas interpretções e F em outras,
- F em todas as interpretações.

Classificação de fórmulas

Definição. Seja $\varphi \in FLC$.
Dizemos que φ é:

1. **satisfazível** se existe uma interpretação I tal que $I^*[\varphi] = V$,
   ou seja,
   se ocorre ao menos um V na última coluna da tabela de φ.

2. **tautologia**, denotado por $\models \varphi$, se, para toda interpretação I,
   temos que $I^*[\varphi] = V$,
   ou seja,
   se ocorre somente V na última coluna da tabela de φ.

Classificação de fórmulas

3. **contraditória** se para toda interpretação I, temos que
   $I^*[\varphi] = F$,
   ou seja,
   se ocorre somente F na última coluna da tabela de φ.

4. **contingente** se não é nem tautologia nem contradição,
   ou seja,
   se ocorre pelo menos um V e ocorre pelo menos um F na última coluna da tabela de φ.

Verdade × Validade

De acordo com a nomenclatura mais atual em uso, quando uma fórmula φ é uma **tautologia** também dizemos que é **válida**.

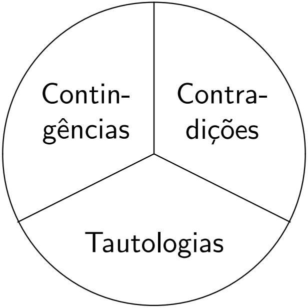
Aqui, preferimos utilizar o termo “validade” para nos referimos a argumentos.

Porém, quando não houver confusão, falaremos também de fórmulas válidas, ou seja, V em todas as suas interpretações.

Mas, sempre devemos tomar cuidado para não confundirmos verdade (verdade em uma interpretação específica) com validade (verdade em todas as interpretações).

Tautologias, Contingências e Contradições

De acordo com estas definições, o conjunto das fórmulas de LC pode ser particionado em 3 subconjuntos:

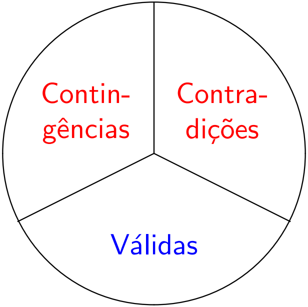


Fórmulas da LC

Válidas × Inválidas

Definição. Uma fórmula é **inválida** se não é uma tautologia.

A oposição válida × inválida particiona o conjunto das fórmulas do seguinte modo:

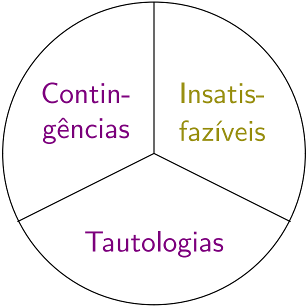


Fórmulas da LC

Satisfazíveis × Insatisfazíveis

Definição. Uma fórmula é **insatisfazível** se não é satisfazível.

A oposição satisfazível × insatisfazível particiona o conjunto das fórmulas do seguinte modo:



Fórmulas da LC

O problema da classificação

Problema da Classificação

Dada: uma fórmula φ da LC.

Questão: Classificar φ como tautologia, contingente ou contraditória.

Podemos utilizar as árvores de avaliação para resolver o Problema da Classificação.

Só precisamos tomar cuidado com qual é o tipo de árvore que construímos e como lemos a informação fornecida pela árvore saturada.

Exemplo 6: $\models (p \lor q) \to (\neg p \to q)$?

Perguntando à árvore se a fórmula pode ser falsificada:

$$(p \lor q) \to (\neg p \to q) : F$$

Exemplo 6: $\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$?

Perguntando à árvore se a fórmula pode ser falsificada:

$$(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) : F \ \surd$$
$$p \vee q : V$$
$$\neg p \rightarrow q : F$$

Exemplo 6: $\models (p \vee q) \to (\neg p \to q)$?

Perguntando à árvore se a fórmula pode ser falsificada:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \to (\neg p \to q) : F \ \checkmark \\
p \vee q : V \ \checkmark \\
\neg p \to q : F \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
p : V & q : V
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 6: $\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$?

Perguntando à árvore se a fórmula pode ser falsificada:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) : F \surd \\
p \vee q : V \surd \\
\neg p \rightarrow q : F \surd \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
p : V & q : V \\
\neg p : V & \neg p : V \\
q : F & q : F
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 6: $\models (p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$?

Perguntando à árvore se a fórmula pode ser falsificada:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) : F \; \surd \\
p \vee q : V \; \surd \\
\neg p \rightarrow q : F \; \surd \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
p : V & q : V \\
\neg p : V \; \surd & \neg p : V \; \surd \\
q : F & q : F \\
p : F & p : F
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 6: $\models (p \vee q) \to (\neg p \to q)$?

Perguntando à árvore se a fórmula pode ser falsificada:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \to (\neg p \to q) : F \ \surd \\
p \vee q : V \ \surd \\
\neg p \to q : F \ \surd \\
\begin{array}{cc}
p : V & q : V \\
\neg p : V \surd & \neg p : V \surd \\
q : F & q : F \\
p : F & p : F \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Como a árvore saturada é fechada, não existe interpretação na qual a f ormula é F, ou seja, $\models (p \vee q) \to (\neg p \to q)$.

Exemplo 7: $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ é satisfazível?

Perguntando à árvore se a fórmula pode ser verificada:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : V$$

Exemplo 7: $(p \vee q) \to (p \to q)$ é satisfazível?

Perguntando à árvore se a fórmula pode ser verificada:

$$(p \vee q) \to (p \to q) : V \ \surd$$

$$p \vee q : F \qquad\qquad p \to q : V$$

Exemplo 7: $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ é satisfazível?

Perguntando à árvore se a fórmula pode ser verificada:

$$(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : V \ \surd$$

$$\begin{array}{cc} p \vee q : F \ \surd & p \rightarrow q : V \\ p : F & \\ q : F & \end{array}$$

Exemplo 7: $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ é satisfazível?

Perguntando à árvore se a fórmula pode ser verificada:

$$
\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : V \ \surd & \\
p \vee q : F \ \surd & & p \rightarrow q : V \ \surd \\
p : F & & \\
q : F & p : F & q : V
\end{array}
$$

Exemplo 7: $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ é satisfazível?

Perguntando à árvore se a fórmula pode ser verificada:

$$
\begin{array}{c}
(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : V \ \checkmark \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
p \vee q : F \ \checkmark \\
p : F \\
q : F \\
\times
\end{array}
&
\begin{array}{c}
p \rightarrow q : V \ \checkmark \\
\begin{array}{cc}
p : F & q : V \\
\downarrow & \downarrow
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Exemplo 7: $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ é satisfazível?

Perguntando à árvore se a fórmula pode ser verificada:

$$
\begin{array}{ccc}
 & (p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : V \;\surd & \\
 & \swarrow \qquad \searrow & \\
p \vee q : F \;\surd & & p \rightarrow q : V \;\surd \\
p : F & & \swarrow \qquad \searrow \\
q : F & & p : F \qquad q : V \\
\times & & \downarrow \qquad\quad \downarrow
\end{array}
$$

Como a árvore saturada é aberta, existe interpretação na qual a fórmula é V, ou seja, $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ é satisfazível.

Tomando $p : F$, temos $(p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q) : V$

Exercício 2

Verifique se:

(i) $\models [p \leftrightarrow (q \land r)] \leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \land (p \leftrightarrow q)]$

(ii) $\models [p \leftrightarrow (q \lor r)] \leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \lor (p \leftrightarrow q)]$

(iii) $\models [p \leftrightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)]$

(ii) $\models [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)]$

Parte 4

Árvores de avaliação para LC

Definição intuitiva de árvore de avaliação

Os diagramas que contruímos acima são chamados, genericamente, de **árvores de avaliação** (uma definição formal será apresentada mais adiante).

As árvores de avaliação que contruímos são de dois tipos:

1. as **positivas**, quando a fórmula rotulada inicial é do tipo $\varphi : V$;
2. e as **negativas**, quando a fórmula rotulada inicial é do tipo $\varphi : F$.

Como ilustrado, ambas as árvores fornecem a mesma informação: as interpretações nas quais a fórmula é V e as interpretações nas quais a fórmula é F.

Regras para a construção das árvores de avaliação para LC

A construção de uma árvore de avaliação para uma fórmula rotulada $\varphi : R$ — onde R é V ou F — segue a seguinte ideia geral, independente de qual é a fórmula rotulada:

1. Assuma $\varphi : R$.
2. Calcule sucessivamente os valores das subfórmulas das subfórmulas ... das subfórmulas de φ, marcando com $\surd$ todas as fórmulas rotuladas esgotadas.
3. Até esgotar todas as fórmulas rotuladas moleculares e obter os valores das subfórmulas atômicas.

Regras para a construção das árvores de avaliação para LC

4. Determine todos os ramos nos quais ocorre contradição e os marque com $\times$.

5. Determine todos os ramos nos quais não ocorre contradição e os marque com $\downarrow$.

6. Os ramos marcados com $\downarrow$ fornecem informações para definirmos as interpretação nas quais a fórmula é R — onde R é V ou F.

Regras para a construção das árvores de avaliação para LC

Os valores das subfórmulas das subfórmulas . . . das subfórmulas de φ são calculados por aplicações sucessivas das regras a seguir.

Estas regras são derivadas diretamente da semântica dos conectivos.

Regra do $\neg : V$

$$\neg\varphi \text{ é } V \text{ se, e somente se, } \varphi \text{ é } F.$$

Assim, se temos uma ocorrência de $\neg\varphi : V$ ainda não marcada em algum ramo do diagrama construído até o momento, marcamos $\neg\varphi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : F \end{array}$$

Regra do $\neg : V$

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\neg\varphi : V\ \surd \\
\vdots \\
| \\
\varphi : F
\end{array}
$$

Regra do $\neg : F$

$$\neg\varphi \text{ é } F \text{ se, e somente se, } \varphi \text{ é } V.$$

Assim, se temos uma ocorrência de $\neg\varphi : F$ ainda não marcada em algum do diagrama construído até o momento, marcamos $\neg\varphi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : V \end{array}$$

Regra do $\neg : F$

Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\varphi : F \ \surd \\ \vdots \\ | \\ \varphi : V \end{array}$$

Regra do $\wedge : V$

$\varphi \wedge \psi$ é V se, e somente se, φ é V e ψ é V.

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \wedge \psi : V$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \wedge \psi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$
\begin{array}{c}
| \\
\varphi : V \\
| \\
\psi : V
\end{array}
$$

Regra do $\wedge$: V

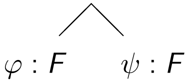
Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \wedge \psi : V \ \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \varphi : V \\ | \\ \psi : V \end{array}$$

Regra do $\wedge$: F

$\varphi \wedge \psi$ é F se, e somente se, φ é F ou ψ é F.

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \wedge \psi$: F ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \wedge \psi$: F e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:



Regra do $\wedge : F$

Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\varphi \wedge \psi : F \ \surd \\
\vdots \\
\begin{array}{cc}
\varphi : F & \psi : F
\end{array}
\end{array}$$

Regra do $\vee$: V

$\varphi \vee \psi$ é V se, e somente se, φ é V ou ψ é V.

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \vee \psi$: V ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \vee \psi$: V e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\varphi : V \qquad \psi : V$$

Regra do $\vee : V$

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\varphi \vee \psi : V \ \checkmark \\
\vdots \\
\begin{array}{cc}
\varphi : V & \psi : V
\end{array}
\end{array}
$$

Regra do $\vee : F$

$\varphi \vee \psi$ é F se, e somente se, φ é F e ψ é F.

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \vee \psi : F$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \vee \psi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : F \\ | \\ \psi : F \end{array}$$

Regra do $\vee : F$

Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \varphi \vee \psi : F \ \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \varphi : F \\ | \\ \psi : F \end{array}$$

Regra do $\to$: V

$$\varphi \to \psi \text{ é } V \text{ se, e somente se, } \varphi \text{ é } F \text{ ou } \psi \text{ é } V.$$

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \to \psi : V$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \to \psi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\varphi : F \qquad \psi : V$$

Regra do $\rightarrow$: V

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\varphi \rightarrow \psi : V \ \surd \\
\vdots \\
\begin{array}{cc}
\diagup & \diagdown \\
\varphi : F & \psi : V
\end{array}
\end{array}
$$

Regra do $\to$: F

$$\varphi \to \psi \text{ é } F \text{ se, e somente se, } \varphi \text{ é } V \text{ e } \psi \text{ é } F.$$

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \to \psi : F$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \to \psi : F$ e expandimos este ramo acrescentando p seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{c} | \\ \varphi : V \\ | \\ \psi : F \end{array}$$

Regra do $\rightarrow$: F

Diagramaticamente, temos:

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\varphi \rightarrow \psi : F \ \surd \\
\vdots \\
| \\
\varphi : V \\
| \\
\psi : F
\end{array}$$

Regra do $\leftrightarrow$: V

$\varphi \leftrightarrow \psi$ é V sse φ e ψ possuem o mesmo valor.

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \leftrightarrow \psi : V$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \leftrightarrow \psi : V$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{cc} & \wedge & \\ \varphi : V & & \varphi : F \\ | & & | \\ \psi : V & & \psi : F \end{array}$$

Regra do $\leftrightarrow$: V

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\varphi \leftrightarrow \psi : V \ \checkmark \\
\vdots \\
\begin{array}{cc}
\diagup & \diagdown \\
\varphi : V & \varphi : F \\
| & | \\
\psi : V & \psi : F
\end{array}
\end{array}
$$

Regra do $\leftrightarrow$: F

$\varphi \leftrightarrow \psi$ é F ss, φ e ψ possuem valores diferentes.

Assim, se temos uma ocorrência de $\varphi \leftrightarrow \psi : F$ ainda não marcada em algum ramo da árvore já construída, marcamos $\varphi \leftrightarrow \psi : F$ e expandimos este ramo acrescentando o seguinte diagrama a todas as suas bifurcações:

$$\begin{array}{cc} \varphi : V & \varphi : F \\ | & | \\ \psi : F & \psi : V \end{array}$$

Regra do $\leftrightarrow$: F

Diagramaticamente, temos:

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\varphi \leftrightarrow \psi : F \ \checkmark \\
\vdots \\
\begin{array}{cc}
\varphi : V & \varphi : F \\
| & | \\
\psi : F & \psi : V
\end{array}
\end{array}
$$

Árvores de avaliação

Regra de inicialização

Iniciamos a construção da **árvore de avaliação** escrevendo a fórmula rotulada $\varphi : R$, onde R é V ou F.

Diagramaticamente, temos:

$$\varphi : R$$

Se R é V, dizemos que a árvore é uma **árvore positiva de avaliação**.

Se R é F, dizemos que a árvore é uma **árvore negativa de avaliação**.

Árvores de refutação

Regras dos conectivos

¬V Se $\neg\varphi : V$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com $\varphi : F$ e marcar $\neg\varphi : V$ com $\surd$.

¬F Se $\neg\varphi : F$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com $\varphi : V$ e marcar $\neg\varphi : F$ com $\surd$.

∧V Se $\varphi \wedge \psi : V$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com ambos $\varphi : V$ e $\psi : V$ e marcar $\varphi \wedge \psi : V$ com $\surd$.

∧F Se $\varphi \wedge \psi : F$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com a bifurcação $\varphi : F$ ou $\psi : F$ e marcar $\varphi \wedge \psi : F$ com $\surd$.

Árvores de refutação

Regras dos conectivos (cont.)

$\vee$V Se $\varphi \vee \psi$: V ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com a bifurcação φ : V ou ψ : V e marcar $\varphi \vee \psi$: V com $\surd$.

$\vee$F Se $\varphi \vee \psi$: F ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com ambos φ : F e ψ : F e marcar $\varphi \vee \psi$: F com $\surd$.

$\rightarrow$V Se $\varphi \rightarrow \psi$: V ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com a bifurcação φ : F ou ψ : V e marcar $\varphi \rightarrow \psi$: V com $\surd$.

Árvores de refutação

Regras dos conectivos (cont.)

$\rightarrow$F Se $\varphi \rightarrow \psi$: F ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com ambos φ : V e ψ : F e marcar $\varphi \vee \psi$: F com $\surd$.

$\leftrightarrow$V Se $\varphi \leftrightarrow \psi$: V ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com a bifurcação [φ : V e ψ : V] ou [φ : F e ψ : F] e marcar $\varphi \vee \psi$: F com $\surd$.

$\leftrightarrow$F Se $\varphi \leftrightarrow \psi$: F ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com a bifurcação [φ : V e ψ : F] ou [φ : F e ψ : V] e marcar $\varphi \vee \psi$: F com $\surd$.

Árvores de refutação

Observamos que cada aplicação de cada regra dos conectivos envolve a marcação da fórmula a partir da qual a regra foi aplicada.

Uma árvore já construída é **saturada** se todas as fórmulas moleculares que ocorrem nela estão marcadas.

Regra de saturação

Aplique as regras acima (em alguma ordem, de maneira controlada) até que a árvore esteja saturada.

A árvore saturada obtida é $A[\varphi : F]$.

Ramo fechado e ramo aberto

Seja $\varphi \in$ FLS, $A[\varphi : F]$ uma árvore de refutação para $\varphi : F$ e R um ramo de $A[\varphi : F]$.

(1) R é fechado se existem uma variável para sentenças s e nós n_1 e n_2 em R tais que n_1 é $s : V$ e n_2 é $s : F$.

(2) R é aberto se não é fechado.

Árvores de avaliação

Definição. Seja $\varphi \in \mathrm{FLC}$.

(1) A **árvore positiva de avaliação de** φ, denotada $A^+[\varphi]$, é a árvore saturada construída por aplicação das regras de avaliação a

$$\varphi : V$$

(2) A **árvore negativa de avaliação de** φ, denotada $A^-[\varphi]$, é a árvore saturada construída por aplicação das regras de avaliação a

$$\varphi : F$$

Regras de avaliação

As regras acima devem ser aplicadas até que todas as fórmulas rotuladas estejam marcadas.

Como a cada aplicação uma fórmula molecular é marcada e no máximo duas novas fórmulas moleculares de comprimento menor que a última fórmula marcada são inseridas na árvore, o processo de construção da árvore, em algum momento, para de ser executado.

Parte 6

Árvores de Refutação para LC

Principais problemas

Podemos, agora, aplicar as árvores de avaliação para resolver os principais problemas tratados em nossa disciplina: equivalência e consequência semântica.

Principais problemas

O problema da consequência semântica é o seguinte:

Problema da Consequência Semântica:

Dadas as fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, tomadas como premissas, e a fórmula ψ, tomada como conclusão, determinar se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ ou não.

Para resolver este problema, devemos determinar se existe, ou não, uma interpretação na qual $\varphi_1 : V$, ..., $\varphi_n : V$ e $\psi : F$.

Árvores de refutação para consequência semântica

Basta, então, "perguntar à árvore" se é possível que tenhamos $\varphi_1 : V$, ..., $\varphi_n : V$ e $\psi : F$.

Ou seja, podemos resolver o problema da consequência semântica construindo uma árvore saturada que inicia com $\varphi_1 : V$, ..., $\varphi_n : V$, $\psi : F$ e verificando se a árvore é aberta ou fechada.

Se a árvore é aberta, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.
Se é fechada, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \not\models \psi$.

Principais problemas

Sejam $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \in$ FLC.

Uma **árvore de refutação** de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ é uma árvore de avaliação saturada cuja construção inicia com:

Árvores de refutação

Regra de inicialização

Iniciamos a construção da árvore escrevendo $\varphi : F$.

Diagramaticamente, temos:

$$\varphi : F$$

Árvores de refutação

Regras dos conectivos

¬V Se $\neg\varphi : V$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com $\varphi : F$ e marcar $\neg\varphi : V$ com $\checkmark$.

¬F Se $\neg\varphi : F$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com $\varphi : V$ e marcar $\neg\varphi : F$ com $\checkmark$.

∧V Se $\varphi \wedge \psi : V$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com ambos $\varphi : V$ e $\psi : V$ e marcar $\varphi \wedge \psi : V$ com $\checkmark$.

∧F Se $\varphi \wedge \psi : F$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com a bifurcação $\varphi : F$ ou $\psi : F$ e marcar $\varphi \wedge \psi : F$ com $\checkmark$.

Árvores de refutação

Regras dos conectivos (cont.)

$\vee$V Se $\varphi \vee \psi : V$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com a bifurcação $\varphi : V$ ou $\psi : V$ e marcar $\varphi \vee \psi : V$ com $\surd$.

$\vee$F Se $\varphi \vee \psi : F$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com ambos $\varphi : F$ e $\psi : F$ e marcar $\varphi \vee \psi : F$ com $\surd$.

$\rightarrow$V Se $\varphi \rightarrow \psi : V$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com a bifurcação $\varphi : F$ ou $\psi : V$ e marcar $\varphi \rightarrow \psi : V$ com $\surd$.

Árvores de refutação

Regras dos conectivos (cont.)

$\rightarrow$F Se $\varphi \rightarrow \psi : F$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com ambos $\varphi : V$ e $\psi : F$ e marcar $\varphi \vee \psi : F$ com $\surd$.

$\leftrightarrow$V Se $\varphi \leftrightarrow \psi : V$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com a bifurcação [$\varphi : V$ e $\psi : V$] ou [$\varphi : F$ e $\psi : F$] e marcar $\varphi \vee \psi : F$ com $\surd$.

$\leftrightarrow$F Se $\varphi \leftrightarrow \psi : F$ ocorre em um ramo r, então expandir todos os ramos abaixo de r com a bifurcação [$\varphi : V$ e $\psi : F$] ou [$\varphi : F$ e $\psi : V$] e marcar $\varphi \vee \psi : F$ com $\surd$.

Árvores de refutação

Observamos que cada aplicação de cada regra dos conectivos envolve a marcação da fórmula a partir da qual a regra foi aplicada.

Uma árvore já construída é saturada se todas as fórmulas moleculares que ocorrem nela estão marcadas.

Regra de saturação

Aplique as regras acima (em alguma ordem, de maneira controlada) até que a árvore esteja saturada.

A árvore saturada obtida é $A[\varphi : F]$.

Ramo fechado e ramo aberto

Seja $\varphi \in$ FLS, $A[\varphi : F]$ uma árvore de refutação para $\varphi : F$ e R um ramo de $A[\varphi : F]$.

(1) R é fechado se existem uma variável para sentenças s e nós n_1 e n_2 em R tais que n_1 é $s : V$ e n_2 é $s : F$.

(2) R é aberto se não é fechado.

Método das Árvores de Refutação de LC

Objetivo: Dada uma fórmula φ de LC, determinar se $\models \varphi$.

Método:

Consiste dos seguintes passos:

1. Contruir uma árvore de refutação (saturada) $A[\varphi : F]$;

2. Examinar todos os ramos de $A[\varphi : F]$.

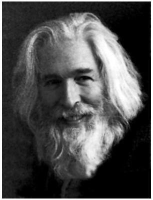
3. Se todos os ramos de $A[\varphi : F]$ estão fechados, então conclua que $\models \varphi$, se não, conclua que $\not\models \varphi$.

Carroll, Beth, Smullyan, Hintikka

Árvores de refutação são o resultado de um trabalho empreendido ao longo dos anos, principalmente, pelos lógicos C.L. Dodgson (ou Lewis Carroll), E.W. Beth, R.M Smullyan, e K.J.J. Hintikka:

C.L. Dodgson (1832 – 1898)

E.W. Beth (1908 – 1964)



R.M Smullyan (1919 – 2017)

K.J. Hintikka (1929 – 2015)

Resultado fundamental

No contexto tratado aqui, o seguinte resultado garante que as árvores cumprem o papel para o qual foram projetadas.

Teorema (Smullyan, 1968)
Se $\varphi \in$ FLC, então as seguintes condições são equivalentes:

(1) $\models \varphi$.

(2) Existe uma árvore de refutação fechada para φ.

Equivalência e validade

O Método de Refutação para LQ pode ser adaptado diretamente na resolução dos problemas EQUIVALÊNCIA LÓGICA e CONSEQUÊNCIA SEMÂNTICA FINITÁRIA em LC.

Para determinar se $\varphi \models\mathrel{\mkern-3mu}\dashv \psi$, basta verificar se $\models \varphi \to \psi$ e $\models \psi \to \varphi$.

Para determinar se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \models \psi$, basta verificar se $\models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$.

Exercício 2

Verificar, pelo Método de Refutação, se as seguintes fórmulas são válidas:

(i) $\models [p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

(ii) $\models [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

(iii) $\models \{(p \vee q) \rightarrow [(\neg p) \vee \neg\neg q]\} \vee (q \rightarrow \neg p)$

(iv) $\models [(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$

(v) $\models [(p \wedge \neg q) \wedge (r \wedge s)] \vee \{[(p \wedge (q \wedge \neg r)] \wedge \neg s\}$

Exercício 3

Dê exemplos de fórmulas φ, tal que:

(i) $VS[\varphi] = \{p\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 2 ramos.

(ii) $VS[\varphi] = \{p, q\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 4 ramos.

(iii) $VS[\varphi] = \{p, q, r\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 8 ramos.

(iv) $VS[\varphi] = \{p, q, r, s\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 16 ramos.

(v) $VS[\varphi] = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ e $A[\varphi]$ tem exatamente 2^n ramos.

Parte 4

Exercícios

Mais exercícios!

Lista de Exercícios – Aula 15

Renata de Freitas & Petrucio Viana
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Verifique se as seguintes fórmulas são tautologias, usando o Método das Árvores de Refutação.

Para cada fórmula contingente ou contraditória identificada, apresente uma interpretação onde ela é falsa:

1.	$(p \to q) \vee (p \wedge \neg q)$	2.	$\neg(q \to p \wedge \neg p)$
3.	$p \to p$	4.	$p \to \neg p$
5.	$\neg(p \to p)$	6.	$(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee r)$
7.	$p \vee q \to p$	8.	$p \leftrightarrow \neg(p \vee q)$
9.	$(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee r)$	10.	$[p \to (q \wedge r)] \to (p \to r)$

Exercício 2 Verifique se as seguintes fórmulas são equivalentes, usando o Método das Árvores de Refutação.

Para cada não equivalência identificada, apresente uma interpretação onde uma das fórmulas é verdadeira e a outra é falsa:

(i) $p \to (q \to r)$ e $\neg r \to (p \to \neg q)$

(ii) $p \wedge (q \to r)$ e $(p \wedge q) \to (p \wedge r)$

(iii) $\neg[p \to (q \wedge r)]$ e $(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)$

(vi) $p \vee (q \to r)$ e $(p \vee q) \to (p \vee r)$

(v) $[e \to (\neg k \wedge \neg m)] \wedge [k \to (\neg e \wedge \neg m)] \wedge [m \to (\neg e \wedge \neg k)]$ e $(e \to \neg k) \wedge (e \to \neg m) \wedge (k \to \neg m)$

Exercício 3 Verifique a validade dos seguintes argumentos, usando o Método das Árvores de Refutação. Para cada argumento inválido identicado, apresente uma interpretação onde as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa.

1. $\dfrac{p \wedge q}{\neg\neg p}$ 2. $\dfrac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \end{array}}{q}$

Simbolização na Lógica dos Quantificadores

Petrucio Viana

IME, UFF

21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Quantificadores: simbolização, sintaxe e semântica básica

Análise Lógica na LQ

Do ponto de vista sintático, a análise lógica de uma sentença consiste em:

1. determinando os seus componentes e
2. explicitar a maneira como ela é formada a partir dos seus componentes por aplicações dos conectivos e quantificadores.

A principal ferramenta para a análise lógica de sentenças é a *simbolização*.

Análise Lógica na LQ

A simbolização de sentenças que contém ocorrências de quantificadores é bem mais complexo do que o da simbolização de enunciados que contém apenas conectivos.

Principalmente, quando os quantificadores ocorrem *aninhados* ou *negados*, como em:

> Nem todos gostam de alguém que gosta de todos que não gostam de ninguém.

Mas, existem diretrizes que nos ajudam na simbolização de enunciados com quantificadores.

Vamos, agora, descrever algumas delas ...

Simbolização dos quantificadores

Como já vimos, simbolizamos os quantificadores de acordo com a tabela:

quantificador	símbolo
para todo	$\forall$
existe	$\exists$

Estes são os únicos símbolos adotados para a simbolização dos quantificadores.

Quanto à sua aplicação na formação de enunciados, os quantificadores seguem a regras bem determinadas, que vamos revisar ...

Sintaxe do *para todo*

O quantificador

$$\forall$$

em conjunto com uma variável v, é aplicado a uma sentença

$$\varphi(v),$$

— o qual do ponto de vista de v expressa uma propriedade mas que pode expressar uma relação por possuir ocorrências de outras variáveis — e forma o enunciado

$$\forall v \varphi(v),$$

chamado a *generalização* de $\varphi(v)$.

Para eliminar ambiguidades, podemos usar parênteses (chaves, colchetes, ...) escrevendo $\forall v(\varphi(v))$ ou $\forall v[\varphi(v)]$, ou ainda $\forall v\{\varphi(v)\}$.

Reescrita e semântica básica do *para todo*

Dois pontos merecem destaque:

1. Antes da simbolização, o para todo pode estar escrito como todo, toda, todos, todas, cada, etc.

2. Quando um domínio D onde a variável v toma valores é especificado, fica entendido que a generalização

$$\forall v \varphi(v)$$

deve ser lida como:

todos os objetos em D possuem a propriedade φ.

Exemplo 1

As sentenças

$\forall x$ (x está calado)

$\forall y$ (y está calado $\wedge$ y está atento)

$\forall z \forall u$ (z senta ao lado de u $\vee$ u senta longe de z)

$\forall z$ (z faz uma pergunta $\rightarrow$ existe alguém que zomba de z)

são generalizações.

Sintaxe do *existe*

O quantificador

$$\exists$$

em conjunto com uma variável v, é aplicado a um enunciado $\varphi(v)$ — o qual do ponto de vista de v expressa uma propriedade mas que pode expressar uma relação por possuir ocorrências de outras variáveis — e forma o enunciado

$$\exists v \varphi(v),$$

chamado a *existencialização* de $\varphi(v)$.

Para eliminar ambiguidades, podemos usar parênteses (chaves, colchetes, ...) escrevendo $\exists v(\varphi(v))$ ou $\exists v[\varphi(v)]$, ou ainda $\exists v\{\varphi(v)\}$.

Reescrita e semântica básica do *existe*

Dois pontos merecem destaque:

1. Antes da simbolização, o existe também pode ser escrito como existe ao menos um, existe, existem, há, etc.

2. Quando um domínio D onde a variável v toma valores é especificado, fica entendido que a existencialização

$$\exists v(\varphi)$$

deve ser lida como

existe ao menos um objeto em D que possui a propriedade φ

Exemplo 2

As sentenças

$\exists x$ (x está acordado)

$\exists y$ (y está acordado $\to$ y está atento)

$\exists z$ (z está atento $\to$ todos estão atentos)

$\forall u$ (u vai passar em lógica se, e somente se, u vai subornar o professor com uma quantia astronômica)

são existencializações.

Observação

As regras de formação dos quantificadores pressupõem que cada aplicação de um quantificador esteja associada a uma ocorrência de variável.

Usualmente, empregamos uma variável diferente para cada ocorrência de quantificador.

Usualmente, a variável quantificada ocorre e ocorre livre (ou seja, não quantificada) no enunciado que está sendo quantificado.

Parte 2

Sentenças componentes

Sentenças componentes, propriedades e relações

O primeiro passo para a simbolização é determinar as sentenças componentes a partir das quais a sentença em questão é formada.

Seja φ uma sentença que possui ocorrência de quantificador.

Para determinar as sentenças componentes de φ, devemos explicitar todas as propriedades e relações que ocorrem em φ e reescrevê-las usando <u>lacunas</u>, da maneira que será agora especificada.

Exemplo 3

A generalização

todos são terráqueos

possui uma única ocorrência da propriedade

ser terráqueo

Seu único componente pode ser escrito como

— é terráqueo

Exemplo 4

A existencialização

existem alienígenas

possui uma única ocorrência da propriedade

ser alienígena.

Seu único componente pode ser escrito como

— é alienígena

Exemplo 5

A generalização

cada uma é uma viúva-negra

possui uma única ocorrência da propriedade

ser viúva-negra.

Seu único componente pode ser escrito como

— é viúva-negra.

Exemplo 6

A existencialização

há falsos-profetas

possui uma única ocorrência da propriedade

ser falso-profeta.

Seu único componente pode ser escrito como

— é falso-profeta

Exemplo 7

A generalização

todos os iluminados são da nobreza

possui ocorrência das propriedades

ser iluminado
ser da nobreza

Seus dois componentes podem ser escritos como

— é iluminado
— é da nobreza

Exemplo 8

A existencialização

existem professores que valem a pena

possui ocorrência das propriedades

ser professor
valer a pena

Seus dois componentes podem ser escritos como

— é pessoa
— vale a pena

Exemplo 9

A generalização

todos os atletas amadores têm contusões

possui ocorrência das propriedades

ser atleta
ser amador
ter contusão

Seus três componentes podem ser escritos como

— é atleta
— é amador
— tem contusão

Exemplo 10

A existencialização

existem mineiros persistentes que vão à praia

possui ocorrência das propriedades

ser mineiro
ser persistente
ir à praia

Seus três componentes podem ser escritos como

— é mineiro
— é persistente
— vai à praia.

Exemplo 11

A generalização

todos os fãs são apaixonados por ela

possui ocorrência da propriedade e da relação

ser fã
ser apaixonado por

Seus dois componentes podem ser escritos como

— é fã
— é apaixonado por —

Exemplo 12

A generalização

todos os seus fãs são apaixonados por ela

possui ocorrência das relações

ser fã de
ser apaixonado por

Seus dois componentes podem ser escritos como

— é fã de —
— é apaixonado por —

Exemplo 13

A existencialização

existem pessoas que não respeitam nenhuma religião

possui ocorrência das propriedades e relação

ser pessoa
ser religião
respeitar

Seus três componentes podem ser escritos como

— é pessoa
— é religião
— respeita —

Exemplo 14

A existencialização

existe um torcedor que vai a todos os jogos do seu time

possui ocorrência das propriedades e relação

ser torcedor
ser jogo
ser do time de
ir para

Seus quatro componentes podem ser escritos como

— é torcedor
— é jogo
— é do time de —
— vai para —

Observação

Observações análogas as já feitas, quando estudamos enunciados componentes em LC, também se aplicam em LQ:

1. Os componentes não possuem ocorrências nem de conectivos nem de quantificadores.
2. Ocorrências distintas de um mesmo componente, em um dado enunciado, não devem ser identificadas, isto é, devem ser consideradas como componentes distintas.

Exercício 1

Determinar os componentes de cada sentença abaixo:

(i) ele passou

(ii) ela estudou

(iii) ele estudou e ela passou

(iv) ela estudou e não passou

(v) ele aprendeu e, por isso, passou

(vi) ela não aprendeu mas, mesmo assim, passou

(vii) entre as aranhas, somente as tarântulas e as viúvas-negras são venenosas

Exercício 1

(viii) todos ou só alguns dos marsupiais têm bolsas e saltam

(ix) nenhum peixe tem asas a não ser que ele pertença à família dos *exocoetidae*

(x) alguns organismos são cordados e outros são moluscos, mas nenhum deles é ambos cordado e molusco

(xi) animais se comportam normalmente quando não estão sendo vigiados

(xii) nenhum pardal constrói um ninho, a menos que esteja acasalando

Exercício 2

Determinar os componentes de cada sentença abaixo:

(i) ele gosta dela

(ii) ela gosta dele

(iii) nem todos acham ele legal

(iv) alguém não se dá bem com ela

(v) todos gostam de cinema mas não de pipoca

(vi) existem os que gostam de jujuba e os que não gostam

(vii) existe uma aluna mais nova do que todas as outras

(viii) todos os alunos sentados na primeira fileira estão se divertindo

Parte 3

Legendas

Legendas

O segundo passo para a simbolização é a definição de uma *legenda de simbolização*.

Antes de definir esta noção, vamos analisá-la através de exemplos.

Exemplo 15

Uma legenda para

todos são terráqueos

pode ser:

$T(x)$: x é terráqueo

Como usual, empregamos *letras maiúsculas sugestivas* precedidas ou intercaladas com lacunas.

Exemplo 16

Uma legenda para

existem alienígenas

pode ser:

$$A : \text{— é alienígena}$$

Exemplo 17

Uma legenda para

cada uma é uma viúva-negra

pode ser:

V : — é viúva-negra

Exemplo 18

Uma legenda para

$$\text{há falsos-profetas}$$

pode ser:

$$F : \text{— é falso-profeta}$$

Exemplo 19

Uma legenda para o enunciado

todos os iluminados são da nobreza

pode ser:

I : — é iluminado
N : — é da nobreza

Exemplo 20

Uma legenda para

existem professores que valem a pena

pode ser:

$$P : \text{— é professor}$$
$$V : \text{— vale a pena}$$

Exemplo 21

Uma legenda para

todos os atletas amadores têm contusões

pode ser:

$$\begin{aligned} A &: \text{— é atleta} \\ M &: \text{— é amador} \\ C &: \text{— tem contusão} \end{aligned}$$

Exemplo 22

Uma legenda para

existem mineiros persistentes que vão à praia

pode ser:

$$\begin{aligned} P &: \text{— é mineiro} \\ Q &: \text{— é persistente} \\ R &: \text{— vai à praia} \end{aligned}$$

Se acharmos apropriado, podemos não usar letras sugestivas.

Exemplo 23

Uma legenda para

todos os fãs são apaixonados por ela

pode ser:

$F(x)$: x é fã
$A(x, y)$: x é apaixonado por y

Exemplo 24

Uma legenda para

todos os seus fãs são apaixonados por ela

pode ser:

$F(u, v)$: u é fã de v
$A(u, v)$: u é apaixonado por v

Exemplo 25

Uma legenda para

existem pessoas que não respeitam nenhuma religião

pode ser:

$$\begin{aligned} P &: \text{— é pessoa} \\ L &: \text{— é religião} \\ R &: \text{— respeita —} \end{aligned}$$

Exemplo 26

Uma legenda para

existem um torcedor que vai a todos os jogos do seu time

pode ser:

$$
\begin{aligned}
T &: \text{— é torcedor} \\
J &: \text{— é jogo} \\
E &: \text{— é do time de —} \\
V &: \text{— vai para —}
\end{aligned}
$$

Legendas

Vamos, agora, definir a noção de legenda:

Legenda para um enunciado

Seja φ um enunciado.

Uma **legenda para** φ é uma legenda para os nomes e componentes que ocorrem em φ.

Observação

Na elaboração de uma legenda, devemos ter cuidado para que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(1) Para todo índice i, cada L_i deve ser da forma

$$X \text{ com um número adequado de lacunas,}$$

onde X é uma das letras $P, Q, R, \ldots$.

(2) Na determinação das letras $l_1, \ldots, l_m, L_1, L_2, \ldots, L_n$, devemos usar letras "novas" de acordo com a necessidade do uso de símbolos diferentes.

Exercício 4

Para cada sentença abaixo, determine uma legenda:

(i)	ela não vai viajar
(ii)	ele e ela são professores
(iii)	todo aluno estuda
(iv)	alguns alunos não comparecem
(v)	nem todo professor é bem pago
(vi)	
(vii)	todo professor que vai a um congresso faz palestra
(viii)	
(ix)	nem todo professor vai viajar e visitar um professor de outra universidade
(x)	há professores que não se preparam e nem explicam a matéria de modo que os alunos entendam

Parte 4

Simbolização

Legendas

Após encontrar as sentenças atômicas e definir uma legenda, o último passo para a simbolização é *simbolizar*!!!

Exemplo 27

A sentença

todos são terráqueos

afirma que cada objeto em questão tem a propriedade

ser terráqueo

Exemplo 27

De acordo com a legenda

$$T : \text{— é terráqueo}$$

pode ser simbolizada por:

$$\forall x[T(x)]$$

Exemplo 28

A sentença

existem alienígenas

afirma que ao menos um objeto em questão tem a propriedade

ser alienígena

Exemplo 28

De acordo com a legenda

$$A(y) : y \text{ é alienígena}$$

pode ser simbolizada por:

$$\exists y[A(y)]$$

Exemplo 29

A sentença

cada uma é uma viúva negra

afirma que cada objeto em questão tem a propriedade

ser viúva negra.

Exemplo 29

De acordo com a legenda

$$V : \text{— é viúva-negra},$$

pode ser simbolizada por:

$$\forall z[V(z)].$$

Exemplo 30

A sentença

há falsos-profetas

afirma que cada objeto em questão tem a propriedade

ser falso-profeta.

Exemplo 30

De acordo com a legenda

$$F : \text{— é falso-profeta},$$

pode ser simbolizada por:

$$\exists u[F(u)].$$

Exemplo 31

A sentença

todos os iluminados são da nobreza

afirma que cada objeto em questão que tem a propriedade

ser iluminado

também tem a propriedade

ser da nobreza

Ou seja, que para cada valor que x assume entre os objetos em questão, a implicação

$$x \text{ é iluminado} \to x \text{ é da nobreza}$$

é V.

Exemplo 31

De acordo com a legenda

$$I(x) : \text{x é iluminado}$$
$$N(x) : x \text{ é da nobreza}$$

pode ser simbolizadoapor:

$$\forall x[I(x) \rightarrow N(x)]$$

Exemplo 32

A sentença

$$\text{existem professores que valem a pena}$$

afirma que algum objeto e, questão tem as propriedades

$$\text{ser professor}$$

e

$$\text{valer a pena}$$

simultaneamente.

Ou seja, que para algum valor que y assume entre os objetos em questão, a conjunção

$$y \text{ é professor} \wedge y \text{ vale a pena}$$

é V.

Exemplo 32

De acordo com a legenda

$$\begin{aligned} P &: \text{— é professor} \\ V &: \text{— vale a pena,} \end{aligned}$$

pode ser simbolizado por:

$$\exists y[P(y) \wedge V(y)].$$

Exemplo 33

A sentença

todos os atletas amadores têm contusões

afirma que cada objeto em questão que tem simultaneamente as propriedades

ser atleta

e

ser amador

também tem a propriedade

ter contusão.

Ou seja, que para cada valor que z assume entre os objetos em questão, a implicação

$$(z \text{ é atleta} \wedge z \text{ é amador}) \rightarrow z \text{ tem contusão}$$

é V.

Exemplo 33

De acordo com a legenda

$$\begin{aligned} A &: \text{— é atleta} \\ M &: \text{— é amador} \\ C &: \text{— tem contusão,} \end{aligned}$$

ele pode ser simbolizado por:

$$\forall z\{[A(z) \wedge M(z)] \to C(z)\}$$

Exemplo 34

A sentença

existem mineiros persistentes que vão à praia

afirma que algum objeto em questão tem as propriedades

ser mineiro,
ser persistente

e

ir à praia

simultaneamente.

Ou seja, que para algum valor que u assume no domínio de quantificação, a conjunção

$$u \text{ é mineiro} \wedge u \text{ é persistentes} \wedge u \text{ vai à praia}$$

é V.

Exemplo 34

De acordo com a legenda

$$\begin{aligned} P &: \text{— é mineiro} \\ Q &: \text{— é persistente} \\ R &: \text{— vai à praia,} \end{aligned}$$

pode ser simbolizada por:

$$\exists u[P(u) \wedge Q(u) \wedge R(u)]$$

Exemplo 35

A sentença

todos os fãs são apaixonados por ela

afirma que todos os objetos em questão que tem a propriedade

ser fã

está relacionado com ela pela relação

estar apaixonado por

Exemplo 35

De acordo com a legenda

$$F: \text{— é fã}$$
$$A: \text{— é apaixonado por —}$$

pode ser simbolizada por:

$$\forall v[F(v) \rightarrow A(v, w)]$$

Exemplo 36

A sentença

todos os seus fãs são apaixonados por ela

afirma que todos os objetos em questão que estão relacionados com ela pela relação

ser fã de

também está relacionado com ela pela relação

estar apaixonado por

De acordo com a legenda

F : — é fã de —
A : — é apaixonado por —

pode ser simbolizada por:

$$\forall v[F(v, w) \to A(v, w)]$$

Exemplo 37

A sentença

existem pessoas que não respeitam nenhuma religião

afirma que algum objeto em questão tem a propriedade

ser pessoa

e não está relacionado pela relação

ser respeitador de

com nenhum objeto que satisfaz a propriedade

ser religião

Exemplo 37

De acordo com a legenda

$$\begin{aligned} &P : \text{— é pessoa} \\ &L : \text{— é religião} \\ &R : \text{— respeita —} \end{aligned}$$

pode ser simbolizada por:

$$\exists x \{P(x) \wedge \forall y [L(y) \rightarrow \neg R(x, y)]\}$$

Exemplo 38

A sentença

existe um torcedor que vai a todos os jogos do seu time

afirma que algum objeto em questão tem a propriedade

ser torcedor

e está relacionado pela relação

vai para

com todos os objetos que satisfazem simultaneamente a propriedade

ser jogo

e a relação

ser do time de

cuja segunda coordenada deve se referir ao objeto que é torcedor.

Exemplo 38

De acordo com a legenda

$$\begin{aligned} T &: \text{— é torcedor} \\ J &: \text{— é jogo} \\ E &: \text{— é do time de —} \\ V &: \text{— vai para —} \end{aligned}$$

pode ser simbolizada por:

$$\exists x\{T(x) \wedge \forall y[J(y) \wedge E(y,x) \rightarrow V(x,y)]\}$$

Exercício 1

Simbolizar em LQ.

(i)
(ii)
(iii) n é um número natural e, portanto, é real.
(iv)
(v)
(vi)
(vii)
(viii)
(ix)
(x)
(xi) Todos são estudiosos, ou dão sorte nas provas.
(xii) Para alguém ser aprovado, é necessário que todos estudem.

(xiii) Uma condição necessária e suficiente para que duas retas dadas sejam paralelas é que elas tenham interseção vazia.

(xiv)

Lógica.

(xv) Uma condição necessária para que um quadrilátero seja quadrado é que seja redondo.

(xvi) Uma condição suficiente para que um número natural seja paré que não seja ímpar.

(xvii) A condição de ser estudioso é suficiente para que ele aprenda a matéria.

(xviii)

(xix) Se a é ímpar e b é par, então a e b são primos entre si.

(xx) Se x e y são números pares, então sua soma também é um número par.

Exercício 1

(i)	todos são covardes
(ii)	alguns são corajosos
(iii)	todas as mulheres são meigas
(iv)	alguns homens são brutos
(v)	todos os quadrados são losangos e retângulos
(vi)	alguns triângulos são isósceles e escalenos
(vii)	todas as figuras planas têm duas dimensões
(viii)	algumas figuras tridimensionais só têm duas dimensões
(ix)	cada número que eu escolhi é primo
(x)	certos números não são primos e nem compostos

Exercício 1

Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

(i) todos são jovens e inocentes
(ii) tudo é quadrado ou redondo
(iii) um número é par se, e somente se, é divisível por 2
(iv) existem pulgas ou carrapatos
(v) alguns quando coagidos reagem
(vi) tem quem ajuda o próximo se, e somente se, é pago para isto

Exercício 1

Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

(i) nem todos são honestos
(ii) não existe aquecimento global
(iii) todos sorriem, mas alguns são tristes
(iv) alguns sobrevivem ou todos os esforços são em vão
(v) se todos praticam esportes, alguns são campeões

Mais exercícios!

Lógica dos Quantificadores: sintaxe e semântica intuitiva (domínios finitos)

Petrucio Viana & Renata de Freitas

IME, UFF

21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Lógica dos Quantificadores

Lógica dos Quantificadores

O próximo passo nos estudos de Lógica Matemática será estudar:

– o papel das partículas todo e existe na formação e avaliação de sentenças

e, como veremos, por esta razão, também

– a formação de sentenças consideradas atômicas.

Nosso objetivo é estender LC para uma lógica mais poderosa que contém as partículas todo e existe.

Todas as decisões que vamos tomar na execução desse projeto são baseadas na semelhança semântica que existe entre o todo e existe e os conectivos e e ou, respectivamente.

As partículas todo e existe são chamadas **quantificadores**, quando são empregadas da maneira que será descrita agora.

Primeiro, vamos ver o que acontece quando nos restringimos a *domínios finitos*.

Parte 2

Quantificadores sobre domínios finitos

Exemplo 1

Considere a seguinte sala e as seguintes pessoas (bíblicas) na sala:

José	*Paulo*
Pedro	*Maria*

SALA 1

Neste contexto, afirmamos:

Todos nesta sala são homens.

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 1

Como temos:

José é homem.	:	*V*
Paulo é homem.	:	*V*
Pedro é homem.	:	*V*
Maria é homem.	:	*F*

concluímos que a sentença é F.

Observe a semelhança semântica do todo com o e:

Todos nesta sala são homens. : F

[*José é homem.*] $\wedge$ [*Pedro é homem.*] $\wedge$
[*Paulo é homem.*] $\wedge$ [*Maria é homem.*] : *F*

Exemplo 2

Considere a seguinte sala e as seguintes pessoas (bíblicas) na sala:

João	*José*
Paulo	*Pedro*

SALA 2

Neste contexto, afirmamos:

Todos nesta sala são homens.

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 2

Como temos:

João é homem.	:	V
José é homem.	:	V
Paulo é homem.	:	V
Pedro é homem.	:	V

concluímos que a sentença é V.

Observe a semelhança semântica do todo com o e:

Todos nesta sala são homens. : V

$$[\textit{João é homem.}] \wedge [\textit{José é homem.}] \wedge$$
$$[\textit{Paulo é homem.}] \wedge [\textit{Pedro é homem.}] \quad : \quad V$$

Generalizando

Dado um domínio finito com m objetos

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

e uma propriedade P sobre estes objetos, a sentença

Todos os elementos do domínio possuem a propriedade P.

é V quando

a_1 *possui a propriedade* P é V e
a_2 *possui a propriedade* P é V e
$\ldots$ e
a_m *possui a propriedade* P é V.

Generalizando

Ou seja, a sentença

Todos os elementos do domínio possuem a propriedade P.

é V

se e somente se

a conjunção

$$(a_1 \text{ possui a propriedade } P) \wedge \cdots \wedge (a_m \text{ possui a propriedade } P)$$

é V.

Generalizando

Analogamente, dado um domínio finito com m objetos

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

e uma propriedade P sobre estes objetos, a sentença

Todos os elementos do domínio possuem a propriedade P.

é F quando

$$\begin{array}{c} a_1 \textit{ possui a propriedade } P \text{ é } F \text{ ou} \\ a_2 \textit{ possui a propriedade } P \text{ é } F \text{ ou} \\ \ldots \text{ ou} \\ a_m \textit{ possui a propriedade } P \text{ é } F. \end{array}$$

Generalizando

Ou seja, a sentença

Todos os elementos do domínio possuem a propriedade P.

é F

se e somente se

a conjunção

$$(a_1 \textit{ possui a propriedade } P) \wedge \cdots \wedge (a_m \textit{ possui a propriedade } P)$$

é F.

“Todo” e “e”

A análise semântica acima mostra que, em domínios finitos, uma regra de avalição para o todo deve ser análoga à regra de avaliação para o e.

Ilustra também que, teoricamente, é sempre possível escrevermos sentenças que envolvem o todo como conjunções.

Ou seja,

em domínios finitos, o todo é equivalente a um e generalizado.

Exemplo 3

Considere a seguinte sala e as seguintes pessoas (bíblicas) na sala:

José	*Paulo*
Pedro	*Maria*

SALA 1

Neste contexto, afirmamos:

Existe uma mulher nesta sala.

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 3

Como temos:

$$\begin{array}{lcl} \textit{José é mulher.} & : & F \\ \textit{Paulo é mulher.} & : & F \\ \textit{Pedro é mulher.} & : & F \\ \textit{Maria é mulher.} & : & V \end{array}$$

concluímos que a sentença é V.

Observe a semelhança do existe com o ou:

$$\textit{Existe uma mulher nesta sala.} \quad : \quad \text{V}$$

$$\begin{array}{c} [\textit{José é mulher.}] \vee [\textit{Paulo é mulher.}] \vee \\ [\textit{Pedro é mulher.}] \vee [\textit{Maria é mulher.}] \quad : \quad V \end{array}$$

Exemplo 4

Considere a seguinte sala e as seguintes pessoas (bíblicas) na sala:

João	*José*
Paulo	*Pedro*

SALA 1

Neste contexto, afirmamos:

Existe uma mulher nesta sala.

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 4

Como temos:

João é mulher.	:	F
José é mulher.	:	F
Paulo é mulher.	:	F
Pedro é mulher.	:	F

concluímos que a sentença é F.

Observe a semelhança do existe com o ou:

Existe uma mulher nesta sala. : F

[*João é mulher.*] $\vee$ [*José é mulher.*] $\vee$
[*Paulo é mulher.*] $\vee$ [*Pedro é mulher.*] : F

Generalizando

Dado um domínio finito com m objetos

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

e uma propriedade P sobre estes objetos, a sentença

Existe um elemento do domínio que possui a propriedade P.

é V quando

a_1 *possui a propriedade* P é V ou
a_2 *possui a propriedade* P é V ou
$\ldots$ ou
a_m *possui a propriedade* P é V.

Generalizando

Ou seja, a sentença

Existe (ao menos um) elemento do domínio que possui a propriedade P.

é V

se e somente se

a disjunção

$$(a_1 \text{ possui a propriedade } P) \vee \cdots \vee (a_m \text{ possui a propriedade } P)$$

é V.

Generalizando

Analogamente, dado um domínio finito com m objetos

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

e uma propriedade P sobre estes objetos,

Existe um elemento do domínio que possui a propriedade P.

é F quando

$$\begin{array}{c} a_1 \textit{ possui a propriedade } P \text{ é } F \text{ e} \\ a_2 \textit{ possui a propriedade } P \text{ é } F \text{ e} \\ \ldots \text{ e} \\ a_m \textit{ possui a propriedade } P \text{ é } F \end{array}$$

Generalizando

Ou seja, a sentença

Existe (ao menos um) elemento no domínio que possui a propriedade P.

é F

se e somente se

a disjunção

$(a_1 \textit{ possui a propriedade } P) \vee \cdots \vee (a_m \textit{ possui a propriedade } P)$

é F.

“Existe” e “ou”

A análise semântica acima mostra que, em domínios finitos, uma regra de avalição para o existe corresponde à regra de avaliação para o ou

ou seja

em domínios finitos, o existe é semanticamente equivalente a um ou generalizado.

Exercícios

Exercício 1

Dados 3 pombos e 2 casas (de pombos), simbolize as sentenças a seguir na LC, utilizando a legenda:

$$p_{ij} \quad : \quad \textit{o pombo } i \textit{ está na casa } j$$

onde $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$.

(i) *Algum pombo está em alguma casa.*

(ii) *Algum pombo está em todas as casas.*

(iii) *Todos os pombos estão em alguma casa.*

(iv) *Todos os pombos estão em todas as casas.*

(v) *Não existe um pombo que esteja em mais de uma casa.*

(vi) *Existe pelo menos uma casa com dois pombos.*

Exercício 2

O **Princípio das Casas de Pombo (PCB)** estabelece que *se a quantidade de pombos é maior do que a quantidade de casas, então:*

> *se todo pombo está em alguma casa e não existe um pombo que esteja em mais de uma casa, então existe pelo menos uma casa com dois pombos.*

(a) Simbolize o PCB para 3 pombos e 2 casas, na LC.

(b) Simbolize o PCB para n pombos e m casas, na LC.
Ou seja, dadas uma certa quantidade n de pombos e uma certa quantidade m de casas, descreva como podemos construir uma fórmula da LC tal que, $n > m$ se e somente se a fórmula é verdadeira em todas as interpretações.

Mais exercícios!

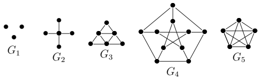
Lista de Exercícios – Aula 17

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Um *grafo* consiste de duas coisas:

1. um conjunto finito de *pontos*, chamados *vértices*;
2. linhas, chamadas *arestas*, ligando estes pontos, de modo que nenhum ponto esteja ligado a si mesmo e cada dois pontos esteja ligado por no máximo uma linha.

Alguns exemplos de grafos bem comportados:



Um grafo é *n-colorível* se podemos atribuir números naturais em $\{1, 2, \ldots, n\}$ a seus vértices de modo que vértices ligados por arestas tenham números diferentes associados:

$n \neq m$

....

Exercício 1 Mostre que se um grafo G é n-colorível e $m > n$, então G também é m-colorível.

Exercício 2 Considere os grafos G_1, G_2, G_3, G_4 e G_5, desenhados acima. Mostre que:

(i) G_1 é 1-colorível.

(ii) Para cada $i = 2, 3, 4, 5$, o grafo G_i é i-colorível mas não é $(i-1)$-colorível.

Lógica dos Quantificadores: sintaxe e semântica intuitiva quantificação em domínios infinitos

Petrucio Viana

IME, UFF

21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Quantificadores sobre domínios infinitos

Quantificação em domínios infinitos

Se trabalhássemos somente com domínios finitos, poderíamos abolir o uso dos quantificadores e ficar somente com os conectivos, escrevendo conjunções e disjunções generalizadas no lugar de sentenças onde ocorrem o todo e o existe.

Mas, em Computação, Engenharia, Matemática, etc., mesmo nos estudos mais elementares, domínios infinitos também são considerados.

Por isso precisamos estudar a formação e avaliação de sentenças por meio dos quantificadores.

Exemplo 1

Considere como domínio o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Neste contexto, afirmamos:

todos os elementos de $\mathbb{N}$ *são positivos*

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 1

Como temos:

$$\begin{aligned} 0 \textit{ é positivo} &\quad : \quad F \\ 1 \textit{ é positivo} &\quad : \quad V \\ 2 \textit{ é positivo} &\quad : \quad V \\ \vdots & \\ n \textit{ é positivo} &\quad : \quad V \\ \vdots & \end{aligned}$$

concluímos que a sentença é F.

Exemplo 1

A sentença

$$\textit{todos os elementos de } \mathbb{N} \textit{ são positivos}$$

é $\quad F$,

da mesma forma como

$$[0 \textit{ é positivo}] \wedge \cdots \wedge [n \textit{ é positivo}] \wedge \cdots$$

seria F, se pudesse ser escrita.

Exemplo 2

Considere como domínio o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Neste contexto, afirmamos:

todos os elementos de $\mathbb{N}$ *são inteiros*

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 2

Como temos:

$$\begin{array}{lcl}
0 \text{ \textit{é inteiro}} & : & V \\
1 \text{ \textit{é inteiro}} & : & V \\
2 \text{ \textit{é inteiro}} & : & V \\
\vdots & & \\
n \text{ \textit{é inteiro}} & : & V \\
\vdots & &
\end{array}$$

concluímos que a sentença é V.

Exemplo 2

A sentença

$$\textit{todos os elementos de } \mathbb{N} \textit{ são inteiros}$$

é V,

da mesma forma como

$$[0 \textit{ é inteiro}] \wedge \cdots \wedge [n \textit{ é inteiro}] \wedge \cdots$$

seria V, se pudesse ser escrita.

Em domínios infinitos, o todo é equivalente, em termos de conteúdo, a uma "conjunção infinita", embora uma tal conjunção não possa ser escrita.

Exemplo 3

Considere como domínio o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Neste contexto, afirmamos:

existe um elemento de $\mathbb{N}$ *que é perfeito*

Esta sentença é V ou F?

Um número natural é perfeito se é igual à soma dos seus divisores próprios.

Exemplo 3

Como temos:

$$\begin{array}{lcl} 0 \text{ \emph{é perfeito}} & : & F \\ 1 \text{ \emph{é perfeito}} & : & F \\ 2 \text{ \emph{é perfeito}} & : & F \\ 3 \text{ \emph{é perfeito}} & : & F \\ 4 \text{ \emph{é perfeito}} & : & F \\ 5 \text{ \emph{é perfeito}} & : & F \\ 6 \text{ \emph{é perfeito}} & : & V \\ \vdots & & \end{array}$$

concluímos que a sentença é V.

Exemplo 3

A sentença

$$\textit{existe um elemento de } \mathbb{N} \textit{ que é perfeito}$$

é V,

da mesma forma como

$$[0 \textit{ é perfeito}] \vee \cdots \vee [n \textit{ é perfeito}] \vee \cdots$$

seria V, se pudesse ser escrita.

Exemplo 4

Considere como domínio o conjunto dos números naturais:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Neste contexto, afirmamos:

existe um elemento de $\mathbb{N}$ *que é irracional*

Esta sentença é V ou F?

Exemplo 4

Como temos:

$$\begin{array}{lcl} 0 \text{ \textit{é irracional}} & : & F \\ 1 \text{ \textit{é irracional}} & : & F \\ 2 \text{ \textit{é irracional}} & : & F \\ \vdots & & \\ n \text{ \textit{é irracional}} & : & F \\ \vdots & & \end{array}$$

concluímos que a sentença é F.

Exemplo 4

A sentença

$$\textit{existe um elemento de } \mathbb{N} \textit{ que irracional}$$

é F,

da mesma forma como

$$[0 \textit{ é irracional}] \vee \cdots \vee [n \textit{ é irracional}] \vee \cdots$$

seria F, se pudesse ser escrita.

Em domínios infinitos, o existe (ao menos um) é equivalente, em termos de conteúdo, a uma “disjunção infinita”, embora uma tal disjunção não possa ser escrita.

Em resumo

1. Em termos de conteúdo, o todo é equivalente a um $\wedge$ generalizado e o existe é equivalente a um $\vee$ generalizado.

2. Mas, em termos de reescrita, não existe uma associação direta entre os conectivos $\wedge$ e $\vee$ e os quantificadores todo e existe.

   Nos casos dos domínios infinitos, não poderíamos escrever, de maneira direta, todo como um $\wedge$ nem existe como um $\vee$.

Parte 2

A noção de variável

A noção de variável

Surge, então, o problema de escrever conjunções e disjunções possivelmente infinitas, como as acima, usando apenas uma quantidade finita de letras.

Um primeiro passo para resolver este problema é considerar se há uma "forma comum" para os componentes das conjunções ou disjunções em questão.

A noção de variável

$$\textit{todos os elementos de } \mathbb{N} \textit{ são positivos}$$

$$[0 \textit{ é positivo}] \wedge \cdots \wedge [n \textit{ é positivo}] \wedge \cdots$$

A forma comum é:

$$x \textit{ é positivo}$$

onde x pode ser visto como um “pronome” que pode ser usado para denotar qualquer um dos elementos do conjunto dos números naturais.

A noção de variável

existem elementos de $\mathbb{N}$ *que são pares*

$$[0 \textit{ é par}] \vee \cdots \vee [n \textit{ é par}] \vee \cdots$$

A forma comum é:

y é par

onde *y* pode ser visto como um "pronome" que pode ser usado para denotar qualquer um dos elementos do conjunto dos números naturais.

A noção de variável

O segundo passo é usar esta “forma comum” para expressar se queremos afirmar a propriedade para todos ou para ao menos um dos elementos.

Se queremos afirmar para todos os naturais, colocamos uma ‘marca’ previamente convencionada deixando claro que a afirmação é feita para todos os elementos do domínio:

para todo x : x é positivo

Se queremos afirmar para ao menos um natural, vamos colocar uma outra ‘marca’ previamente convencionada deixando claro que a afirmação é feita para ao menos um dos elementos do domínio:

existe y : y é par

A noção de variável

As letras

$$x \quad \text{e} \quad y$$

usadas acima são chamadas de *variáveis* e as “marcas”

$$\text{para todo } x \quad \text{e} \quad \text{existe } y$$

são chamadas de *quantificadores aplicados a variáveis*.

Chegamos, então, à noção de “frases que possuem ocorrências de variáveis e/ou quantificadores aplicados a estas variáveis”.

A noção de variável

A formalização das noções de

- variável e
- quantificador aplicado a uma variável

leva a vários detalhes sutis que devem ser considerados, quando elaboramos as definições referentes à sintaxe e à semântica de fórmulas que terão ocorrências de variáveis e quantificadores.

Antes das definições, vamos examinar alguns exemplos.

Parte 3

Análise de sentenças atômicas

Análise de sentenças atômicas

Na análise de sentenças atômicas, procuramos identificar:

- nomes de objetos (ou pronomes), e
- propriedades de objetos ou
- relações entre objetos

que foram utilizados na formação da sentença.

Vejamos, por meio de exemplos, como estes conceitos aparecem ...

Exemplo 5

Ricardo é professor.

Nome : *Ricardo*

O nome denota um objeto fixo no contexto.

Propriedade : *ser professor*

A propriedade é atribuída a um objeto de cada vez.

Exemplo 5

Simbolizamos nomes por letras latinas minúsculas, usualmente, do início do alfabeto.

Simbolizamos pronomes por meio de letras latinas minúsculas, usualmente, do final do alfabeto.

Simbolizamos propriedades por meio de letras latinas maiúsculas, usualmente, do meio do alfabeto.

Exemplo 5

Ricardo é professor.

Legenda:

$$\begin{array}{rcl} \text{a} & : & \textit{Ricardo} \\ \text{P(x)} & : & \textit{x é professor} \end{array}$$

Simbolização:

$$P(a)$$

Exemplo 6

Ele é cineasta.

Pronome : *Ele*

O pronome denota um objeto indeterminado no contexto.

Propriedade : *ser cineasta*

A propriedade é atribuída a um objeto de cada vez.

Exemplo 6

Ele é cineasta.

Legenda:

$$\text{Q(y)} \quad : \quad \textit{y é cineasta}$$

Simbolização:

$$Q(y)$$

Exemplo 7

Ele é amigo de Ricardo.

Pronome : *Ele*

Nome : *Ricardo*

Relação : *ser amigo de*

A relação é atribuída a dois objetos de cada vez.

Exemplo 7

Ele é amigo de Ricardo.

Legenda:

a	:	*Ricardo*
S(x,y)	:	*x é amigo de y*

Simbolização:

$$S(x, a)$$

Exemplo 8

Jorge está entre João e Ricardo.

Nome 1: *Jorge*

Nome 2: *João*

Nome 3: *Ricardo*

Relação : *estar entre* . . . *e* . . .

A relação é atribuída a três objetos de cada vez.

Exemplo 8

Jorge está entre João e Ricardo.

Legenda:

a	:	*Jorge*
b	:	*João*
c	:	*Ricardo*
T(x,y,z)	:	*x está entre y e z*

Simbolização:

$$T(a, b, c)$$

Exemplo 9

Jorge é amigo de João e de Ricardo.

Nome 1: *Jorge*

Nome 2: *João*

Nome 3: *Ricardo*

Relação : *ser amigo de*

A relação é atribuída a dois objetos de cada vez.

Exemplo 9

Jorge é amigo de João e de Ricardo.

Legenda:

a	:	*Jorge*
b	:	*João*
c	:	*Ricardo*
R(x,y)	:	*x é amigo de y*

Simbolização:

$$R(a, b) \wedge R(a, c)$$

Em resumo

Nas suas formas mais simples, os enunciados atômicos da LQ são de dois tipos:

1. **Propriedade** atribuída a um objeto;
2. **Relação** atribuída a mais de um objeto.

Nas suas formas mais simples, os objetos da LQ são denotados de duas maneiras:

1. Por uma **constante**, isto é, por um nome, que determina o objeto no contexto em que o enunciado é proferido;
2. Por uma **variável**, isto é, um pronome, que se refere a um objeto indeterminado no contexto em que o enunciado é proferido.

Notação

Os símbolos reservados para constantes são:

$$a, b, c, \ldots$$

os símbolos reservados para variáveis são:

$$x, y, z, \ldots$$

os símbolos reservados para propriedades e relações são:

$$P, Q, R, \ldots$$

Todos estes símbolos podem ser indexados, se for preciso. E procuramos, também, usar letras sugestivas.

Exercícios

Exercício 1

Simbolizar as seguintes sentenças de enredo de Novela das 9:

(i) *Célia ama Ricardo.*

(ii) *Ricardo não ama Célia.*

(iii) *Célia e Ricardo são amigos.*

(iv) *Célia e João são namorados.*

(v) *Célia ama Ricardo mas namora com João.*

(vi) *João viu Célia com Ricardo e brigou com ela.*

(vii) *João proibiu Célia de encontrar Ricardo.*

(viii) *Ricardo descobriu que ama Célia e contou a verdade para ela.*

(ix) *Célia não acha mais Ricardo interessante.*

(x) *Célia largou João e Ricardo e foi morar com o mordomo em Miami.*

Parte 5

Análise de sentenças moleculares

Exemplo 10

Todos são mortais.

Propriedade: *ser mortal*

Atribuída a todos os objetos (sem exceção).

Exemplo 10

Todos são mortais.

Legenda:

P(z) : *z é mortal*

Simbolização:

$$\forall z[P(z)]$$

Ou, simplesmente, $\forall x P(x)$.

Exemplo 11

Alguém é eterno.

Propriedade: *ser eterno*

Atribuída a (ao menos) um objeto.

Exemplo 11

Alguém é eterno.

Legenda:

Q(u) : *u é eterno*

Simbolização:

$$\exists u[Q(u)]$$

Ou, simplesmente, $\exists y Q(y)$.

Exemplo 12

Nem todos são mortais.

Negação de

Todos são mortais.

Legenda:

P(x) : *x é mortal*

Simbolização:

$$\neg[\forall x P(x)]$$

Exemplo 12: leitura alternativa

Nem todos são mortais.

O mesmo que dizer

Existe (ao menos) um que não é mortal.

Legenda:

P(x) : *x é mortal*

Simbolização:

$$\exists x[\neg P(x)]$$

Exemplo 13

Ninguém é eterno.

O mesmo que dizer

Não existe (ao menos) um que é eterno.

Legenda:

Q(y) : *y é eterno*

Simbolização:

$$\neg[\exists y Q(y)]$$

Exemplo 13: leitura alternativa

Ninguém é eterno.

O mesmo que dizer

Todos não são eternos.

Legenda:

Q(y) : *y é eterno*

Simbolização:

$$\forall x[\neg Q(x)]$$

Exemplo 14

Todos são falíveis e mortais.

Propriedade 1: *ser falível*
Propriedade 2: *ser mortal*

Atribuídas em conjunto a todos os objetos (sem exceção).

Legenda:

R(x)	:	*x é falível*
S(x)	:	*x é mortal*

Simbolização:

$$\forall x[R(x) \land S(x)]$$

Exemplo 15

Existem pobres que são saudáveis.

Propriedade 1: *ser pobre*
Propriedade 2: *ser saudável*

Atribuídas em conjunto a (ao menos) um objeto.

Legenda:

T(y)	:	*y é pobre*
U(y)	:	*y é saudável*

Simbolização:

$$\exists y[T(y) \land U(y)]$$

Exemplo 16

Todos os homens são mortais.

Propriedade 1: *ser homem*
Propriedade 2: *ser mortal*

Afirma que a totalidade dos homens está contida na totalidade dos mortais.

Legenda:

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{H(z)} & : & z \text{ é homem} \\ \mathrm{M(z)} & : & z \text{ é mortal} \end{array}$$

Simbolização:

$$\forall z(H(z) \to M(z))$$

Exemplo 17

Existem aqueles cujo heroísmo decorre da covardia.

Propriedade 1: *ser covarde*
Propriedade 2: *ser herói*

Legenda:

C(u)	:	*u é covarde*
H(u)	:	*u é herói*

Simbolização:

$$\exists u[C(u) \to H(u)]$$

Em resumo

As sentenças moleculares são formadas a partir de sentenças atômicas, por aplicação de conectivos e quantificadores associados a variáveis.

As sentenças atômicas são simbolizadas em uma das formas

$$P(t) \quad ou \quad R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

onde P simboliza uma propriedade, R simboliza uma relação e $t, t_1, t_2, \ldots, t_n$ são constantes ou variáveis.

Os quantificadores associados às variáveis são

$$\forall x \quad , \quad \exists x \quad , \quad \forall y \quad , \quad \exists y \quad , \quad \forall z \quad , \quad \exists z \quad , \quad \ldots$$

Parte 6

Exercícios

Exercício 2

Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

(i) *Todos são covardes.*

(ii) *Alguns são corajosos.*

(iii) *Todas as mulheres são meigas.*

(iv) *Alguns homens são brutos.*

(v) *Todos os quadrados são losangos e retângulos.*

(vi) *Alguns triângulos são isósceles e escalenos.*

(vii) *Todas as figuras planas têm duas dimensões.*

(viii) *Algumas figuras tridimensionais têm duas dimensões.*

(ix) *Cada número escolhido é primo.*

(x) *Certos números não são primos e nem compostos.*

Exercício 4

Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

(i) *Todos são jovens e inocentes.*

(ii) *Tudo é quadrado ou redondo.*

(iii) *Cada um é feliz se, e somente se, é ingênuo.*

(iv) *Existem pulgas ou carrapatos.*

(v) *Alguns quando coagidos reagem.*

(vi) *Tem quem faz caridade se, e somente se, é recompensado.*

Exercício 3

Para cada enunciado abaixo, determine uma legenda para a sua simbolização e simbolize-o, de acordo com a legenda determinada.

(i) *Nem todos são iguais.*

(ii) *Não existe aquecimento global.*

(iii) *Todos sorriem, mas alguns são tristes.*

(iv) *Alguns sobrevivem ou todos os esforços são em vão.*

(v) *Se todos praticam esportes, alguns são campeões.*

Exercício 4

Simbolizar as sentenças:

(i) *Romeu ama Julieta.*

(ii) *Romeu e Julieta se amam.*

(iii) *Todos amam Romeu e amam Julieta.*

(iv) *Todos amam a peça Romeu e Julieta.*

(v) *A mãe de Julieta não ama Romeu e ama Julieta.*

(vi) *O pai de Romeu detesta Julieta.*

(vii) *Romeu é amado por alguém e Julieta é amada por alguém.*

(viii) *Romeu não é amado por todos e Julieta não é amada por alguém*

(ix) *Qualquer um que ama Romeu, ama Julieta.*

(x) *Qualquer um que ama Romeu, ama Julieta, e vice-versa.*

Mais exercícios!

GAN00166 Lógica para a Ciência da Computação 2022-1

Lista de Exercícios – Aula 18

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Classifique cada expressão abaixo como constante ou variável.

(i) 2^{2^2}

(ii) $x + 1$

(iii) Pelé

(iv) um amigo de Pelé

(v) (x, y)

(vi) o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$

(vii) $2 \times \frac{x}{2}$

(viii) $(1 + 2)^3$

(ix) algum aluno de MD

(x) ela e ele

Exercício 2 Classifique como constante ou variável:

(i) o número x que somado com 1 é par

(ii) o triângulo ABC de lados 3, 4 e 5

Exercício 3 Cada sentença abaixo é formada por propriedades e relações aplicadas a nomes ou variáveis. Em cada caso, destacar os nomes, as varivéis, as propriedades e as relações envolvidas.

(i) Petrúcio é professor.

(ii) Flávia é monitora.

(iii) Flávia é orientanda de Petrúcio.

(iv) Flávia e Petrucio estão na UFF.

(v) $f(x)$ é uma função.

Sintaxe da Lógica dos Quantificadores

Petrucio Viana & Renata de Freitas

IME, UFF

21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Princípios sintáticos

LQ é uma extensão de LC

A lógica que estamos definindo é uma extensão da LC, chamada de Lógica dos Quantificadores ou, simplesmente, LQ.

Tudo o que aprendemos sobre LC será aproveitado em LQ.

As novidades — e as complicações a elas associadas — decorrem da presença das variáveis e dos quantificadores.

Sintaxe da LQ

Tudo o que foi dito nas aulas anteriores, sobre os quantificadoes, é formalizado nesta aula e na próxima.

As definições obedecem aos mesmos padrões que as definições correspondentes em LC mas, como esperado, são ligeiramente mais complicadas.

Sintaxe da LQ

A sintaxe de LQ está baseada nos seguintes princípios:

1. As sentenças são classificadas em atômicas ou moleculares.
2. As sentenças atômicas não possuem ocorrências de conectivos nem de quantificadores.
3. As sentenças moleculares são formadas a partir dos sentenças atômicas pelo uso dos conectivos e dos quantificadores.

4. As sentenças atômicas, agora, não são completamente atômicas, mas analisadas como tendo uma das formas:

   - Fato atômico: sentenças que por alguma razão não vamos analisar.
     Isto é como em LC: sentenças que não analisamos são classificadas como atômicas.

   - Propriedade aplicada a um objeto: sentenças que afirmam a pertinência de um objeto a um conjunto.

   - Relação aplicada a mais de um objeto: sentenças que afirmam a interrelação de vários objetos, segundo algum critério.

Exemplo 1

(a) *Maria é executiva.*

Propriedade aplicada a um objeto.

(b) *As ruas A, B, C e D formam um quarteirão.*

Relação aplicada a mais de um objeto.

(c) *Chove torrencialmente.*
É necessário que Maria pegue o avião.
Às 7h de hoje Maria vai estar presa no engarrafamento.

Fatos atômicos

Exemplo 2

4. Os "sujeitos" das sentenças atômicas podem ser específicos, denotados por nomes, ou não específicos. denotados por pronomes, no contexto em que a sentença é proferida.

(a) *Petrucio é casado.*

Sujeito específico: *Petrucio*.

(b) *Ele e Márcia são casados.*

Sujeito não específico: *Ele*.
Sujeito específico: *Márcia*.

Advertência

Há também a possibilidade de examinarmos a estrutura dos sujeitos, classificando-os como *atômicos* ou *moleculares*.

Marcos,
Luiz,
Sebastião
são sujeitos atômicos.

O pai de Marcos e Luiz,
O irmão de Luiz,
O carro da esposa de Sebastião
são sujeitos moleculares.

Mas deixaremos esta análise para outra ocasião e trataremos todos os sujeitos como atômicos.

Parte 2

Alfabeto de LQ

Alfabeto da LQ

O **alfabeto** da LQ consiste dos seguintes símbolos:

(i) **Variáveis para sentenças**: p , q , r , $\ldots$
(indexadas ou não)

(ii) **Variáveis para indivíduos**: x , y , z , $\ldots$
(indexadas ou não)

(iii) **Constantes para indivíduos**: a , b , c , $\ldots$
(indexadas ou não)

Alfabeto de LQ

(iv) **Variáveis para propriedades ou relações**: P , Q , R , ...
(indexadas ou não)

(v) **Conectivos**: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
(os mesmos de LC)

(vi) **Quantificadores**: $\forall$, $\exists$

(vii) **Sinais de pontuação**: (,)

Alfabeto de LQ

Assumimos que os símbolos acima são distintos dois a dois e que nenhum símbolo é uma sequência de outros símbolos.

Assumimos que a cada símbolo para relação corresponde um número natural maior ou igual a 2, chamado de **aridade**, que determina o número fixo e determinado de constantes e/ou variáveis ao qual o símbolo deve ser aplicado.

Observação importante

Os conjuntos das variáveis e constantes são denotados de acordo com a seguinte tabela:

variáveis para sentenças	VS
variáveis para indivíduos	VI
constantes para indivíduos	CI
variáveis para propriedades e relações	VR

Cada um destes conjuntos pode ser finito ou infinito, depende da situação que estamos analisando.

Na verdade, LQ não é um único formalismo, mas uma família de sistemas semelhantes, parametrizada pelos conjuntos de variáveis e constantes que estão sendo adotados no momento.

Significado intuitivo

Variáveis para sentenças: sentenças (atômicas) da Língua Portuguesa ou da Linguagem Matemática.

Variáveis para indivíduos: objetos não especificados no contexto, que pertencem a um determinado universo de discurso.

Constantes para indivíduos: objetos especificados no contexto, que pertencem a um determinado universo de discurso.

Variáveis para propriedades: subconjuntos de objetos pertencentes a um determinado universo de discurso.

Significado intuitivo

Variáveis para relações: relações entre objetos pertencentes a um determinado universo de discurso.

conectivo	*nome*	*significado*
$\neg$	símbolo de negação	não (é o caso que)
$\wedge$	símbolo de conjunção	e (simultaneamente)
$\vee$	símbolo de disjunção	ou (inclusivo)
$\rightarrow$	símbolo de implicação	se...então (causa e consequência)
$\leftrightarrow$	símbolo de biimplicação	se, e somente se (é o mesmo que)

Significado intuitivo

quantificador	*nome*	*significado*
$\forall$	símbolo de quantificação universal	para todo objeto, sem excessão
$\exists$	símbolo de quantificação existencial	existe ao menos um objeto

Os quantificadores são chamados carinhosamente de **para todo** e **existe**, respectivamente.

Parte 3

Fórmulas de LQ

Vamos, agora, apresentar uma definição das fórmulas de LQ, isto é, das palavras formadas com os símbolos do alfabeto de LQ que consideraremos como fazendo sentido.

Termos da LQ

Como os "sujeitos" desempenham um papel importante na formação das sentenças atômicas e no uso dos quantificadores, eles recebem uma denominação especial.

Definição: Os **termos** da LQ são as constantes e as variáveis para indivíduos.

Termos são denotados genericamente pela letra t (indexada ou não).

O conjunto dos termos é $\mathsf{TRM} = \mathsf{VI} \cup \mathsf{CI}$.

Observe que termos não são fórmulas.

Fórmulas de LQ

Definição: As **fórmulas** da LQ são definidas pelas seguintes regras:

1. Cada variável para sentença é uma fórmula.
2. Se t é um termo e X é uma variável para propriedades, então $X(t)$ é uma fórmula.
3. Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e X é uma variável para relações de aridade n, então $X(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é uma fórmula.

Fórmulas de LQ

4. Se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula.

5. Se φ e ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ são fórmulas.

6. Se v é uma variável para indivíduos e φ é uma fórmula, então $(\forall v\varphi)$ e $(\exists v\varphi)$ são fórmulas.

Assumimos que nenhum objeto é uma fórmula a não ser que possa ser obtido por um número finito de aplicações das regras acima.

O conjunto das fórmulas de LQ é denotado por FLQ

Exemplos de fórmulas

$p \quad , \quad P(a) \quad , \quad P(z)$

$Q(a, x) \quad , \quad R(a, x, b, y)$

$P(x) \quad , \quad P(y)$

$(\forall x P(x))$

$(P(y) \rightarrow (\forall x P(x)))$

$(\exists y (P(y) \rightarrow (\forall x P(x))))$

Atômicas e moleculares em LQ

Além da nomenclatura da LC, na LQ também adotamos as seguintes:

Definição: Sejam $\varphi, \psi \in$ FLQ, $v \in$ VI e $X \in$ VR. Dizemos que:

1. φ é **atômica** se

   é uma variável sentencial;

   ou é da forma $X(t)$, onde t é uma constante ou variável para indivíduos;

   ou é da forma $X(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, onde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são variáveis ou constantes para indivíduos.

Atômicas e moleculares em LQ

2. $(\forall v \varphi)$ é uma **generalização** de φ.

   Dizemos também que φ é a **fórmula generalizada** e v é a **variável de generalização**.

3. Dizemos que $(\exists v \varphi)$ é uma **existencialização** de φ.

   Dizemos também que φ é a **fórmula existencializada** e v é a **variável de existencialização**.

Observação 1

Como sempre, na prática, procuramos não utilizar parênteses desnecessários
e
procuramos utilizar outros símbolos, como colchetes, chaves e ângulos, nos lugar dos parênteses, para facilitar a leitura das fórmulas.

Observação 2

Na prática, só aplicamos um quantificador $\forall v$ ou $\exists v$, onde v é uma variável para indivíduos, a uma fórmula φ,
quando
φ possui uma ocorrência da variável v, de modo que *faça sentido* aplicarmos o quantificador.

Por exemplo, não faz sentido escrever:

$$\forall xp$$
$$\forall yQ(a)$$
$$\exists zP(y)$$

etc.

Exercício 1

Classificar as seguintes frases como nomes, pronomes, sentenças atômicas, sentenças moleculares ou “nada disso”:

(i) *Ele e ela.*

(ii) *Ricardo é mais velho do que ela.*

(iii) *Um ser feliz é Ricardo.*

(iv) *João está bêbado pois provou todas as cachaças do bar.*

(v) *O bêbado que já provou todas as cachaças do bar.*

(vi) $\sqrt{x^2 - (y^3 + 7)}$.

(vii) $1 + 2 < 3$.

(viii) $1^2 + 2^3 + 3^4$.

(ix) $x < (y < z)$.

(x) $\forall x[0 < x \rightarrow (0 < x^2 \wedge x^3 < 0)]$.

Parte 4

Variáveis livres e ligadas,
fórmula abertas e fechadas

Variáveis livres e ligadas

Uma característica importante das fórmulas da LQ é que por meio delas podemos expressar propriedades de objetos e relações entre objetos (específicos ou não), pertencentes a um universo de discurso.

Almir é feliz.

Ou seja, Almir tem a propriedade de ser feliz.

$$F(a)$$

Almir é amigo dele

Ou seja, Almir é amigo de um ser implícito no contexto.

$$A(a, x)$$

Variáveis livres e ligadas

Outra característica marcante das fórmulas da LQ é que por meio delas também podemos expressar propriedades do próprio universo de discurso, fazendo referências a seus elementos.

Todos são felizes.

Ou seja, o universo de discurso é formado apenas por seres felizes.

$$\forall x F(x)$$

Alguém ama a todos.

Ou seja, o universo de discurso possui um ser que ama a todos os seres do universo de discurso.

$$\exists x \forall y A(x, y)$$

Variáveis livres e ligadas

A diferença crucial entre fórmulas como

$$F(a) \quad \text{e} \quad G(x, b)$$

que expressam propriedades de e relações entre objetos, e fórmulas como

$$\forall x F(x) \quad \text{e} \quad \exists x \forall y G(x, y)$$

que expressam propriedades do universo de discurso, está na presença de quantificadores aplicados às variáveis.

Variáveis ligadas

Definição. Sejam $v \in \mathsf{VI}$ e $\varphi, \psi \in \mathsf{FLQ}$. Dizemos que:

1. v **ocorre ligada** em $(\forall v \varphi)$ e em $(\exists v \varphi)$.
2. v **ocorre ligada** em ψ se v ocorre ligada em alguma subfórmula de ψ
(necessariamente da forma $(\forall v \varphi)$ ou $(\exists v \varphi)$).

Variáveis livres

Definição. Sejam $v \in \mathsf{VI}$ e $\varphi \in \mathsf{FLQ}$.
Dizemos que v **ocorre livre** em φ
se
v ocorre em φ mas v não ocorre ligada em φ.

A princípio, uma variável pode ocorrer livre e ligada em uma mesma fórmula.

Por exemplo, x em

$$P(x) \wedge \forall x P(x).$$

Mas, seria melhor ter escrito

$$P(x) \wedge \forall y P(y).$$

Fórmulas abertas e fechadas

Definição. Seja φ uma fórmula de LQ.
Dizemos que φ é:

1. **aberta** se φ possui ao menos uma ocorrência livre de variável;
2. **fechada** se φ não possui ocorrências livres de variáveis.

As fórmulas

$$
\begin{array}{l}
R(x,x) \\
[\forall x \forall y R(x,y)] \to R(x,x) \\
[\forall x \exists y R(x,y)] \to [\exists y \forall x R(y,x)] \\
\forall x \forall y \forall z \{R(x,y) \to [R(y,z) \to R(x,z)]\}
\end{array}
$$

são aberta, aberta, fechada e fechada, respectivamente.

Fórmulas abertas e fechadas

Fórmulas abertas “expressam” características dos objetos designados pelas variáveis que ocorrem livres nelas.

Fórmulas fechadas “expressam” características do domínio de discurso.

Exercício 2

Uma frase é **aberta** se seu significado (que pode ser um objeto ou um valor de verdade) depende da atribuição de objetos a algum pronome que ocorre (possivelmente implícito) nela (no contexto em que ela é proferida).
Classificar as frases abaixo como abertas ou fechadas:

(i) João e Ricardo.

(ii) João e ele.

(iii) O gordinho mais charmoso do Brasil.

(iv) João perdeu um monte de peso.

(v) Ricardo perdeu k kilos.

Exercício 2

(vi) Todos eles querem passar sem estudar.

(vii) Alguns gostam dele e outros não.

(viii) $0 \leq x \rightarrow 0 \leq x^2$.

(ix) $\forall x[0 < x \rightarrow \exists y(0 = y \wedge x \leq y)]$.

(x) $\forall x\{0 \leq x \rightarrow \exists y[x < y \wedge \forall z(z < u^2)]\}$.

Mais exercícios!

Lista de Exercícios – Aula 19

Petrucio Viana & *Renata de Freitas*
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Determine se cada fórmula abaixo é aberta ou fechada.

(i) $P(x)$.

(ii) $\exists x P(x)$.

(iii) $\forall y[P(y) \to Q(y)]$.

(v) $[\forall z P(z)] \to Q(z)$.

(v) $R(x, a)$.

(vi) $\exists y R(x, y)$.

(vii) $Q(c, d, e)$.

(viii) $[S(x, y) \to S(y, x)] \to [S(a, b) \to S(b, a)]$.

(ix) $\forall x[P(x) \to Q(x)] \to [P(a) \to Q(a)]$.

(x) $[\forall x \forall y P(x, y)] \to P(y, x)$.

Exercício 2 Explique qual é a diferença sintática entre uma fórmula aberta e uma fórmula fechada.

Exercício 3 Explique qual é a diferença semântica entre uma fórmula aberta e uma f'ormula fechada.

Semântica da Lógica dos Quantificadoress

Petrucio Viana & Renata de Freitas

IME, UFF
21 de março de 2023

Sumário

Parte 1

Domínios de avaliação

Quantificadores, variáveis e totalidades de objetos

A ocorrência de um quantificador está sempre associada a ocorrência de uma variável.

Esta, por sua vez, está sempre associada a uma totalidade de objetos.

O valor de uma sentença quantificada usualmente depende da totalidade de objetos considerada.

Exemplo 1

$$\forall x(0 \leq x)$$

é V quando o domínio do $\forall$ é o conjunto números naturais:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

De fato, a componente

$$0 \leq x$$

é V para todos os valores de $x \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1

$$\forall x(0 \leq x)$$

é F quando o domínio do $\forall$ é o conjunto dos números inteiros:

$$\ldots, -m, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

De fato, a componente

$$0 \leq x$$

é F quando x assume, por exemplo, -1 como valor.

Exemplo 2

Existem quadrúpedes,

ou seja,

Existe y, tal que y é quadrúpede,

é V quando o domínio do $\exists$ é o conjunto A dos animais da Fundação RIOZOO.

De fato, a componente

y é quadrúpede

é V quando y assume a elefanta Koala como valor.

Exemplo 2

Existe y, tal que y é quadrúpede.

é F quando o domínio do $\exists$ é formado pelo conjunto P das pessoas que estão visitando o zoológico.

De fato, a componente

y é quadrúpede

é F para todos os valores de y em P.

Em resumo

Cada ocorrência de quantificador em um enunciado está associada a um ("um" aqui é numeral) domínio de avaliação.

O domínio de avaliação contém todos os valores possíveis que o pronome ou a variável associada àquela ocorrência pode assumir.

O valor do enunciado quantificado pode depender do domínio de avaliação considerado.

Um alerta!

Alerta Vermelho!!!

Dependendo de como interpretamos o enunciado quantificado podem haver várias alternativas para a escolha do domínio de avaliação.

Exemplo 3

$$\forall z \ (z \text{ possui raiz quadrada})$$

pode ter:

- $\mathbb{C}$ como domínio e ser V.
- $\mathbb{R}$ como domínio e ser F.
- $\mathbb{R}^+$ como domínio e ser V.
- $\{0, 1, 2\}$ como domínio e ser F.
- $\{0, 1\}$ como domínio e ser V.

Exemplo 4

Existem seres vivos.

pode ter:

- O conjunto de todos os objetos na Terra como domínio e ser V.
- O conjunto de todos os objetos em Marte como domínio e ser F (até o momento em que estamos lendo este slide).
- O conjunto unitário $\{$Petrucio$\}$ como domínio e ser V (até o momento em que estamos lendo este slide).

De uma maneira geral, temos . . .

Definição. Seja $\varphi \in$ FLQ e Qv uma ocorrência de um dos quantificadores $\forall$ ou $\exists$, seguida de uma variável v, em φ.

De acordo com a maneira que escrevemos fórmulas quantificadas, a frase Qv ocorre em φ porque, durante a formação de φ, ela foi aplicada a uma subfórmula $\psi(v)$ que possui ocorrência livre de v.

Um **domínio de avaliação** para a ocorrência Qv é uma totalidade não vazia de objetos para os quais faz sentido perguntar se a fórmula

$$\mathrm{Q}v[\psi(v)]$$

é V ou F.

Exemplo 5

Para

$$\forall x(x \text{ é invertível})$$

podemos ter:

- No Ensino Básico, apenas domínios formados por números.
- No Ensino Médio, domínios formados por números ou matrizes.
- No Ensino Superior, domínios formados por números, ou matrizes, ou funções.

Exemplo 6

Para

$$\exists x(x \text{ é perfeito})$$

podemos ter:

- Para um matemático, o domínio dos números naturais.
- Para uma "pessoa normal" domínios formados por peças manufaturadas, pessoas, entidades divinas, etc.
- Para uma "criança normal" o conjunto unitário formado pela sua mãe.

Parte 2

Avaliação de sentenças quantificadas

Regra de avaliação do $\forall$

Dada uma fórmula $\varphi(v)$ e um domínio de quantificação D:

$\forall v[\varphi(v)]$ é V em D
quando
$\varphi(v)$ é $\underline{V \text{ para todos os valores}}$ que v pode assumir em D.

$\forall v[\varphi(v)]$ é F em D
quando
$\varphi(v)$ é $\underline{F \text{ para ao menos um dos valores}}$ que v pode assumir em D.

Tabela de avaliação do $\forall$

Dado um domínio D, cujos elementos são a, b, c, ...

$\varphi(v)$	$\forall v \varphi(v)$
V para todos os valores de v em D	V
F para ao menos um dos valores de v em D	F

O problema é que esta “tabela” tem um tamanho *potencialmente* infinito!

$\forall v \varphi(v) : V$ se e somente se $\varphi(a) \wedge \varphi(b) \wedge \varphi(c) \wedge \cdots : V$

Exemplo 7

A tabela acima justifica a seguinte avaliação informal ...

A generalização

$$\forall x\ (x^2 - x = 0)$$

é F em

$$D = \mathbb{R},$$

pois, por exemplo,

$$2^2 - 2 = 0$$

é F.

Exemplo 8

A tabela acima justifica a seguinte avaliação informal ...

A generalização

$$\forall x \; (x^2 - x = 0)$$

é V em

$$D' = \{0, 1\},$$

pois

$$0^2 - 0 = 0$$

$$1^2 - 1 = 0$$

são ambos V.

Regra de avaliação do $\exists$

Dada uma fórmula $\varphi(v)$ e um domínio de quantificação, D:

$\exists v[\varphi(v)]$ é V em D
quando
$\varphi(v)$ é <u>V para ao menos um dos valores</u> que v pode assumir em D.

$\exists v[\varphi(v)]$ é F em D
quando
$\varphi(v)$ é <u>F para todos os valores</u> que v pode assumir em D.

Tabela de avaliação do $\exists$

Dado um domínio D, cujos elementos são a, b, c, ...

$\varphi(v)$	$\exists v \varphi(v)$
V para ao menos um dos valores de v em D	V
F para todos os valores de v em D	F

O problema é que esta tabela tem um tamanho *potencialmente* infinito!

$\exists v \varphi(v) : V$ se e somente se $\varphi(a) \vee \varphi(b) \vee \varphi(c) \vee \cdots : V$

Exemplo 9

A tabela acima justifica a seguinte avaliação informal ...

A existencialização

$$\exists x \; (x^2 - x - 1 = 0)$$

é V em

$$D = \mathbb{R},$$

pois

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 0$$

é V.

Exemplo 10

A tabela acima justifica a seguinte avaliação informal ...

A existencialização

$$\exists x \ (x \text{ é par})$$

é F em

$$D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\},$$

pois

$$\begin{gathered} 1 \text{ é par} \\ 3 \text{ é par} \\ \vdots \\ 15 \text{ é par} \end{gathered}$$

são todos F.

Exercício 1

Para cada sentença abaixo, determine, intuitivamente, um domínio no qual ela é V e um outro no qual ela é F.

(i) $\exists x(x^2 - 3x + 2 = 0)$

(ii) $\forall x(x^2 - x = 0)$

(iii) Existem animais herbívoros.

(iv) Todos são jogadores de futebol.

(v) $\exists y(y < 0)$

(vi) $\forall u(\frac{u}{3} + \frac{u}{4} = 7)$

Exercício 2

Para cada enunciado abaixo, determine, intuitivamente, se ele é V ou F em $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

(i) $\forall x(x + 2 > 4)$

(ii) $\exists y(3y - 1 = 14)$

(iii) $\exists z(z^2 - 1 = 3)$

(iv) $\forall u(u - 5 < 1)$

Parte 2

Árvores de interpretação e interpretação na LQ

Problema da interpretação

Para começar, vamos considerar as sentenças:

$$P(c)$$

$$\forall x P(x)$$

$$\exists x P(x)$$

$$P(c) \to \forall x P(x)$$

$$[\forall x P(x)] \to P(c)$$

$$P(c) \to \exists x P(x)$$

$$[\exists x P(x)] \to P(c)$$

Como podemos interpretá-las, ou seja, determinar "contextos" onde elas são V ou F?

Precisamos de uma nova noção de interpretação

Se uma sentença φ só possui ocorrências de conectivos, uma interpretação para φ é uma atribuição de valores, V ou F, às fórmulas atômicas que ocorrem em φ.

Agora, se φ possui ocorrência de quantificadores, a possível dependência do valor de φ não só aos valores dos componentes mas, também, ao domínio de quantificação considerado pode impossibilitar que φ seja interpretada de uma maneira tão simples.

Precisamos de uma nova noção de interpretação

Para interpretar fórmulas que possuem ocorrências de quantificadores, precisamos de uma noção de interpretação que dê conta desta problemática.

Vamos buscar inspiração nas árvores de avaliação que definimos para interpretar as fórmulas da LC, como uma alternativa às tabelas de avaliação.

Vamos iniciar considerando fórmulas simples e, gradativamente, considerando fórmulas cada vez mais complexas.

Exemplo 1

Consideremos a fórmula $P(c)$.

Em quais interpretações ela é V?

E em quais ela é F?

Exemplo 1(a): $P(c) : V$?

Supomos $P(c) : V$.

Pelas diretrizes da semântica da LQ, temos:

1. um domínio D no qual P e c estão definidos,
2. uma propriedade em D denotada por P,
3. um objeto em D denotado por c,
4. o objeto denotado por c deve ter a propriedade denotada por P.

Estas são as únicas informações que podemos obter a partir de $P(c) : V$.

Exemplo 1(a): $P(c) : V$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $P(c) : V$?

$$P(c) : V$$

Exemplo 1(a): $P(c) : V$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $P(c) : V$?

$$P(c) : V \ \surd$$

Marcamos a fórmula rotulada examinada esgotada com $\surd$.

Exemplo 1(a): $P(c) : V$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $P(c) : V$?

$$P(c) : V \ \surd$$

Exemplo 1(a): $P(c) : V$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $P(c) : V$?

$$P(c) : V \ \surd$$
$$\downarrow$$

Exemplo 1(a): $P(c) : V$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $P(c) : V$?

$$P(c) : V \ \surd$$
$$\downarrow$$

Marcamos o ramo aberto saturado com $\downarrow$.

Exemplo 1(a): $P(c) : V$?

$$P(c) : V \checkmark$$
$$\downarrow$$

A árvore fornece o domínio $D = \{c\}$ e a propriedade $P = \{c\}$.

Assim para interpretarmos

$$P(c) : V$$

podemos definir

$$\begin{array}{lcl} D & : & \{c\} \\ P & : & \{c\} \end{array}$$

Exemplo 1(b): $P(c) : F$?

Supomos $P(c) : F$.

Pela semântica da LQ, temos:

1. um domínio D no qual P e c estão definidos,
2. uma propriedade em D denotada por P,
3. um objeto em D denotado por c,
4. o objeto denotado por c não pode ter a propriedade denotada por P.

Estas são as únicas informações que podemos obter a partir de $P(c) : F$.

Exemplo 1(b): $P(c) : F$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $P(c) : F$?

$$P(c) : F$$

Exemplo 1(b): $P(c) : F$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $P(c) : F$?

$$P(c) : F \ \surd$$

Exemplo 1(b): $P(c) : F$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $P(c) : F$?

$$P(c) : F \ \surd$$

Marcamos a fórmula rotulada examinada esgotada com $\surd$.

Exemplo 1(b): $P(c) : F$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $P(c) : F$?

$$P(c) : F \ \surd$$
$$\downarrow$$

Exemplo 1(b): $P(c) : F$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $P(c) : F$?

$$\begin{array}{c} P(c) : F \ \surd \\ \downarrow \end{array}$$

Marcamos o ramo aberto saturado com $\downarrow$.

Exemplo 1(b): $P(c) : F$?

$$P(c) : F \ \surd$$
$$\downarrow$$

A árvore fornece o domínio $D = \{c\}$ e a propriedade $P = \emptyset$.

Assim para interpretarmos

$$P(c) : F$$

podemos definir

$$\begin{array}{lcl} D & : & \{c\} \\ P & : & \emptyset \end{array}$$

Exemplo 2

Consideremos a fórmula $\forall x P(x)$.

Em quais interpretações ela é V?

E em quais ela é F?

Exemplo 2(a): $\forall x P(x) : V$?

Supomos $\forall x P(x) : V$.

Pela semântica de LQ, temos:

1. um domínio D no qual P está definida,
2. uma propriedade em D denotada por P,
3. todos os objetos do domínio possuem a propriedade denotada por P.

Estas são as únicas informações que podemos obter a partir de $\forall x P(x) : V$.

Exemplo 2(a): $\forall x P(x) : V$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $\forall x P(x) : V$?

$$\forall x P(x) : V$$

Exemplo 2(a): $\forall x P(x) : V$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $\forall x P(x) : V$?

$$\forall x P(x) : V$$

Como a propriedade denotada por P é V para qualquer objeto do domínio, tomando um objeto qualquer e denotando-o por a, temos $P(a)$.

Exemplo 2(a): $\forall x P(x) : V$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $\forall x P(x) : V$?

$$\begin{array}{c} \forall x P(x) : V \\ P(a) : V \end{array}$$

Não marcamos $\forall x P(x) : V$ com $^{\surd}$ pois esta informação é uma conjunção potencialmente infinita e uma aplicação de P a a não a esgota potencialmente.

Exemplo 2(a): $\forall x P(x) : V$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $\forall x P(x) : V$?

$$\begin{gathered} \forall x P(x) : V \\ P(a) : V \\ \downarrow \end{gathered}$$

A árvore ficou aberta pois nenhuma contradição ocorre no ramo já definido.

Exemplo 2(a): $\forall x P(x) : V$?

$$\forall x P(x) : V$$
$$P(a) : V$$
$$\downarrow$$

A árvore fornece o domínio $D = \{a\}$ e a propriedade $P = \{a\}$.

Assim para interpretarmos

$$\forall x P(x) : V$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \{a\} \\ P & : & \{a\} \end{array}$$

Exemplo 2(b): $\forall x P(x) : F$?

Supomos $\forall x P(x) : F$.

Pela semântica da LQ, temos:

1. um domínio D no qual P está definida,
2. uma propriedade em D denotada por P,
3. ao menos um objeto do domínio não possui a propriedade denotada por P.

Estas são as únicas informações que podemos obter a partir de $\forall x P(x) : F$.

Exemplo 2(b): $\forall x P(x) : F$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $\forall x P(x) : F$?

$$\forall x P(x) : F$$

Exemplo 2(b): $\forall x P(x) : F$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $\forall x P(x) : V$?

$$\forall x P(x) : F$$

Como a propriedade denotada por P é F para ao menos um objeto do domínio, podemos tomar um objeto específico, denotá-lo por a e afirmar $P(a) : F$.

Exemplo 2(b): $\forall x P(x) : F$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $\forall x P(x) : V$?

$$\forall x P(x) : F \; \surd$$
$$P(a) : F$$

Marcamos $\forall x P(x) : F$ com $\surd$ pois esta informação não garante que P é F para outros objetos além daquele que já denotamos por a. Ou seja, a aplicação de P a a esgota a informação potencialmente.

Exemplo 2(b): $\forall x P(x) : F$?

O que nos diz a árvore de avaliação para $\forall x P(x) : V$?

$$\begin{array}{c} \forall x P(x) : F \\ P(a) : F \\ \downarrow \end{array}$$

A árvore ficou aberta pois nenhuma contradição ocorre no ramo já definido.

Exemplo 2(b): $\forall x P(x) : F$?

$$\forall x P(x) : F \; \surd$$
$$P(a) : F$$
$$\downarrow$$

A árvore fornece o domínio $D = \{a\}$ e a propriedade $P = \emptyset$.

Assim para interpretarmos

$$\forall x P(x) : F$$

podemos definir

$$\begin{array}{lcl} D & : & \{a\} \\ P & : & \emptyset \end{array}$$

Sentenças atômicas da forma sujeito e propriedade

Seja $P(c) \in \mathsf{FLQ}$, onde $c \in \mathsf{IC}$.

Para determinarmos um valor para $P(c)$, devemos saber:

1. a qual domínio P diz respeito;
2. qual é a propriedade nesse domínio que P denota;
3. qual é o objeto desse domínio que c denota.

Exemplo 11

Para

$$P(c)$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{o conjunto das pessoas nessa sala} \\ P & : & \text{— usa óculos} \\ c & : & \text{Petrucio} \end{array}$$

Nesta interpretação, $P(c)$ "significa":

Petrucio usa óculos

.

Nessa interpretação, o enunciado é V.

Sentenças atômicas da forma sujeitos e relação

Seja $R(c, v) \in \mathsf{FLQ}$, onde $c \in \mathsf{IC}$ e $v \in \mathsf{IV}$.

Para determinarmos um valor para $R(c, v)$, devemos saber:

1. a qual domínio R diz respeito;
2. qual é a relação nesse domínio que R denota.
3. qual é o objeto desse domínio que c denota;
4. qual é o objeto desse domínio que v denota.

Exemplo 12

Para

$$R(c, v)$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{o conjunto dos números naturais} \\ R & : & \text{— e — são primos entre si} \\ c & : & 2 \\ v & : & 4 \end{array}$$

Nesta interpretação, $R(c, v)$ "significa":

2 e 4 são primos entre si

.

Nessa interpretação, o enunciado é F.

Sentenças da forma quantificador aplicado a propriedade

Seja $\mathrm{Q}v[\varphi(v)] \in \mathrm{FLQ}$, onde Q é um quantificador, $\varphi(v)$ é atômico da forma 'sujeito e propriedade', e v ocorre livre em $\varphi(v)$.

Para determinarmos um valor para $\mathrm{Q}v[\varphi(v)]$, devemos saber:

1. a qual domínio $\mathrm{Q}v$ diz respeito;
2. qual é a propriedade que $\varphi(v)$ representa, neste domínio.

Não interpretamos variáveis ligadas

Observe que não precisamos explicitar um valor para a variável v pois, em geral, para determinarmos o valor de um enunciado

$$Qv[\varphi(v)]$$

não é necessário conhecermos um valor específico da variável v, mas é suficiente sabermos em que domínio ela toma valores.

Exemplo 13

Para

$$\forall x[R(x)]$$

podemos escolher

$$\begin{aligned} D &: \text{ o conjunto de todos os átomos} \\ R &: \text{ — tem elétron.} \end{aligned}$$

Nesta interpretação, $\forall x[R(x)]$ "significa":

$$\forall x(x \text{ tem elétron}),$$

ou seja,

Todos têm elétron.

Nessa interpretação, o enunciado é V, pois $R(x) : V$ para todos os valores de x em D.

Exemplo 13 em $\mathbb{N}$

Para

$$\forall x[R(x)]$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \mathbb{N}^* \\ R & : & \text{— é positivo.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\forall x[R(x)]$ “significa”:

$$\forall x(x \text{ é positivo}),$$

ou seja,

Todos são positivos.

Nessa interpretação, o enunciado é V, pois $R(x) : V$ para todos os valores de x em D.

Exemplo 14

Para
$$\forall x[R(x)]$$
podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{o conjunto de todos os cientistas} \\ R(x) & : & x \text{ é do sexo masculino.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\forall x[p(x)]$ "significa":
$$\forall x(x \text{ é do sexo masculino}),$$
ou seja,

Todos são do sexo masculino.

Nessa interpretação, o enunciado é F pois, por exemplo, se x : Marie Curie, temos $R(x)$: F.

Exemplo 14 em $\mathbb{N}$

Para

$$\forall x[R(x)]$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \mathbb{N} \\ p(x) & : & x \text{ é par.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\forall x[p(x)]$ "significa":

$$\forall x(x \text{ é par}),$$

ou seja,

Todos são pares.

Nessa interpretação, o enunciado é F pois, por exemplo, se $x : 1$, temos $R(x) : F$.

Sentenças da forma quantificadores aplicados a relação

Seja $Q_1 v_1 Q_2 v_2[\varphi(v_1.v_2)] \in$ FLQ, onde Q_1, Q_2 são quantificadores, $\varphi(v_1, v_2)$ é atômica da forma 'sujeitos e relação', e v_1, v_2 ocorrem livres em $\varphi(v_1, v_2)$.

Para determinarmos um valor para $Q_1 v_1 Q_2 v_2[\varphi(v_1.v_2)$, devemos saber:

1. a qual domínio $Q_1 v_1$ e $Q_2 v_2$ dizem respeito;
2. qual é a relação que $\varphi(v_1, v_2)$ representa, neste domínio.

Exemplo 15

Para

$$\forall x \forall y [S(x, y)]$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{o conjunto de todos os alunos dessa sala} \\ R & : & \text{— e — se conhecem.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\forall x \forall y [S(x, y)]$ "significa":

$$\forall x \forall y (x \text{ e } y \text{ se conhecem}),$$

ou seja,

Cada um conhece todos os outros.

Nessa interpretação, o enunciado é V, pois $S(x, y) : V$ para todos os valores de x e de y em D.

Exemplo 16

Para

$$\forall x \forall y[S(x,y)]$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{o conjunto de todos os alunos dessa sala} \\ R & : & \text{— é amigo de —.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\forall x \forall y[S(x,y)]$ "significa":

$$\forall x \forall y(x \text{ é amigo de } y),$$

ou seja,

Cada um é amigo de tods os outros.

Nessa interpretação, o enunciado é F, pois se x : Petrucio e y : Augusto temos $S(x,y)$: F.

Exemplo 17

Para

$$\forall x \exists y [S(x, y)]$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{o conjunto dos números naturais} \\ R & : & \text{— é maior do que —.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\forall x \exists y [S(x, y)]$ "significa":

$$\forall x \exists y (x \text{ é maior do que } y),$$

ou seja,

Para cada um existe um que é maior.

Nessa interpretação, o enunciado é V, pois para cada valor que x assume em D, se tomamos $y : x + 1$, temos $S(x, y) : V$.

Exemplo 18

Para

$$\forall x \exists y[S(x, y)]$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{o conjunto dos times de futebol do Brasil} \\ R & : & \text{— tem mais campeonatos brasileiros do que —.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\forall x \exists y[S(x, y)]$ "significa":

$$\forall x \exists y(x \text{ tem mais campeonatos brasileiros do que } y),$$

ou seja,

Para cada um existe um que tem mais campeonato brasilerios.

Nessa interpretação, o enunciado é F, pois se x : Íbis para cada valor que y assume em D, temos $S(x, y)$: F.

Exemplo 19

Para

$$\exists x \forall y [S(x, y)]$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{o conjunto dos seres} \\ R & : & \text{— ama —.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\exists x \forall y [S(x, y)]$ "significa":

$$\forall x \exists y (x \text{ ama } y),$$

ou seja,

Existe alguém que ama a todos.

Nessa interpretação, o enunciado é V, pois x : *Jesus*, para cada valor que y assume em D, temos $S(x, y)$: V.

Exemplo 20

Para

$$\exists x \forall y [S(x, y)]$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{o conjunto dos números naturais} \\ R & : & \text{— é maior do que—.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\exists x \forall y [S(x, y)]$ "significa":

$$\exists x \forall y (x \text{ é maior do que } y),$$

ou seja,

Existe um que é maior do que todos.

Nessa interpretação, o enunciado é F, pois para cada valor que x assume em D, se tomamos $y : x + 1$, temos $S(x, y) : F$.

Exemplo 19

Para

$$\exists x \forall y [S(x, y)]$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{o conjunto dos seres} \\ R & : & \text{— ama —.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\exists x \forall y [S(x, y)]$ "significa":

$$\forall x \exists y (x \text{ ama } y),$$

ou seja,

Existe alguém que ama a todos.

Nessa interpretação, o enunciado é V, pois x : *Jesus*, para cada valor que y assume em D, temos $S(x, y) : V$.

Exemplo 20

Para

$$\exists x \forall y [S(x, y)]$$

podemos escolher

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{o conjunto dos números naturais} \\ R & : & \text{— é maior do que—.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\exists x \forall y [S(x, y)]$ “significa”:

$$\exists x \forall y (x \text{ é maior do que } y),$$

ou seja,

Existe um que é maior do que todos.

Nessa interpretação, o enunciado é F, pois para cada valor que x assume em D, se tomamos $y : x + 1$, temos $S(x, y) : F$.

Parte 4

Interpretações de sentenças quantificadas

Enunciados da forma quantificadore aplicados a conectivos

Seja $\mathrm{Q}v[\varphi(v)] \in \mathrm{FLQ}$, onde Q é um quantificador e $\varphi(v)$ é formada por aplicações de conectivos aos componentes $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, ..., $\varphi_n(v)$ — todos da forma 'sujeito propriedade' —, que possuem ocorrência(s) livre(s) de v.

Para determinarmos um valor para $\mathrm{Q}v[\varphi(v)]$, devemos saber:

1. a qual domínio $\mathrm{Q}v$ diz respeito;
2. quais são as propriedades que $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, ..., $\varphi_n(v)$ representam, neste domínio.

Novamente, não vamos explicitar um valor para a variável v, pois ela não ocorre livre.

Exemplo 13

Para

$$\exists y[\neg q(y)]$$

podemos escolher:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{conjunto de todas as pessoas} \\ q(y) & : & y \text{ tem automóvel.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\exists y[\neg q(y)]$ "significa":

$$\exists y \neg (y \text{ tem automóvel}),$$

ou seja,

alguém não tem automóvel

e é V, pois, por exemplo, Petrucio não tem automóvel.

Exemplo 13 em $\mathbb{N}$

Para

$$\exists y[\neg q(y)]$$

podemos escolher:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \mathbb{N} \\ q(y) & : & y \text{ é primo.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\exists y[\neg q(y)]$ "significa":

$$\exists y \neg (y \text{ é primo}),$$

ou seja,

alguém não é primo

e é V, pois, por exemplo, se $x : 1$, temos $\neg q(y) : V$.

Exemplo 14

Para

$$\exists y[\neg q(y)]$$

podemos escolher:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{conjunto de todas as pessoas} \\ q(y) & : & y \text{ mora na lua.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\exists y[\neg q(y)]$ "significa":

$$\exists y \neg \text{ (} y \text{ mora na terra),}$$

ou seja,

existem aqueles que não moram na terra

e é F, pois temos $\neg q(y)$: F para todos os valores de y.

Exemplo 14 em $\mathbb{N}$

Para

$$\exists y[\neg q(y)]$$

podemos escolher:

$$\begin{array}{lll} D & : & \text{conjunto dos números pares} \\ q(y) & : & y \text{ é múltiplo de 2.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\exists y[\neg q(y)]$ "significa":

$$\exists y \neg (y \text{ é múltiplo de } 2),$$

ou seja,

existem aqueles que não são múltiplos de 2

e é F, pois temos $\neg q(y)$: F para todos os valores de y.

Exemplo 15

Para

$$\forall z[r(z) \wedge \neg s(z)]$$

podemos escolher:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{conjunto de todos os triângulos} \\ r(z) & : & z \text{ tem três lados} \\ s(z) & : & z \text{ tem quatro ângulos,} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\forall z[r(z) \wedge \neg s(z)]$ "significa":

$$\forall z\ [z \text{ tem três lados} \wedge \neg\ (z \text{ tem quatro ângulos})],$$

ou seja,

todos têm três lados, mas não quatro ângulos.

e é V pois temos $r(z) \wedge \neg s(z) : V$ para todos os valores de z.

Exemplo 15 em $\mathbb{N}$

Para

$$\forall z[r(z) \wedge \neg s(z)]$$

podemos escolher:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \{1,2,3,4,5\} \\ r(z) & : & z \text{ é natural} \\ s(z) & : & z \text{ é maior do que 6.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\forall z[r(z) \wedge \neg s(z)]$ "significa":

$$\forall z\ [z \text{ é natural} \wedge \neg\ (z \text{ é maior do que 6})],$$

ou seja,

todos são naturais, mas não são maiores do que 6.

e é V pois temos $r(z) \wedge \neg s(z) : V$ para todos os valores de z.

Exemplo 16

Para

$$\forall z[r(z) \wedge \neg s(z)]$$

podemos escolher:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{conjunto de todos os mamíferos} \\ r(z) & : & z \text{ tem quatro patas} \\ s(z) & : & z \text{ é carnívoro.} \end{array}$$

Nesta interpretação, $\forall z[r(z) \wedge \neg s(z)]$ "significa":

$$\forall z\ [z \text{ tem quatro patas} \wedge \neg\ (z \text{ é carnívoro})],$$

ou seja,

todos são quadrúpedes e não são carnívoros.

e é F pois, por exemplo, se x : Clyde, o leão vesgo, temos $\neg r(z) \wedge \neg s(z) : F$.

Exemplo 16 em $\mathbb{N}$

Para
$$\forall z[r(z) \wedge \neg s(z)]$$
podemos escolher:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \{0\} \\ r(z) & : & z \text{ é igual a } 1 \\ s(z) & : & z \text{ é igual a } 0. \end{array}$$

Nesta interpretação, $\forall z[r(z) \wedge \neg s(z)]$ “significa”:
$$\forall z\ [z \text{ é igual a } 1 \wedge \neg\ (z \text{ é igual a } 0)],$$
ou seja,

todos são iguais a 1 e diferentes de 0.

e é F, pois se $x : 0$, $\neg r(z) \wedge \neg s(z) : F$.

Enunciados da forma conectivos aplicados a quantificadores

Podemos, agora, considerar enunciados obtidos pela aplicação de conectivos a enunciados com uma ocorrência de quantificador no início.

Para isto, basta utilizar as diretrizes acima em conjunto sobre todo o enunciado.

Exemplo 17

Enunciado:

$$\forall x[p(x)] \to \exists y[q(y)]$$

Interpretação:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{formado por todos os animais} \\ p(x) & : & x \text{ é mortal} \\ q(y) & : & y \text{ é mamífero.} \end{array}$$

Significado:

Se todos são mortais, então existem mamíferos.

Avaliação:
Temos que $p(x) : V$ para todos os valores de v.
Assim, $\forall u[r(u)] : V$.
Além disso, $q(y) : V$ para ao menos um valor de y.
Assim, $\exists y[q(y)] : V$.
Logo, $\forall x[p(x)] \to \exists y[q(y)] : V$.

Exemplo 18

Enunciado:

$$\forall x[p(x)] \to \exists y[q(y)]$$

Interpretação:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{formado por todos os números naturais} \\ p(x) & : & x \text{ é positivo} \\ q(y) & : & y \text{ é divisível por } 0, \end{array}$$

Significado:

se todos são positivos, então existem divisíveis por 0.

Avaliação:
Temos que $p(x) : V$ para todos os valores de v.
Assim, $\forall u[r(u)] : V$.
Além disso, $q(y) : F$ para todos os valores de y.
Assim, $\exists y[q(y)] : F$.
Logo, $\forall x[p(x)] \to \exists y[q(y)] : F$.

Exemplo 19

Enunciado:

$$\forall u[r(u)] \wedge \exists v[s(v)]$$

Interpretação:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{ser quadrilátero} \\ r & : & \text{ter quatro ângulos} \\ s & : & \text{ser quadrado,} \end{array}$$

Significado:

todos têm quatro ângulos e existem quadrados.

Avaliação:
Nesta interpretação, $r(u) : V$ para todos os valores de u.
Assim, $\forall u[r(u)] : V$.
Além disso, $s(v) : V$ para algum valor de v.
Assim, $\exists v[s(v)] : V$.
Logo, $\forall u[r(u)] \wedge \exists v[s(v)] : V$.

Exemplo 20

Enunciado:

$$\forall u[r(u)] \land \exists v[s(v)]$$

Interpretação:

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{o conjunto de todos os seres} \\ r & : & \text{ser racional} \\ s & : & \text{ser irracional.} \end{array}$$

Significado:

todos são racionais e existe um irracional.

Avaliação:
Temos que $r(u) : F$ para algum valor de u.
Assim, $\forall u[r(u)] : F$.
Logo, $\forall u[r(u)] \land \exists v[s(v)] : F$.

Parte 5

Interpretações

Interpretações para um enunciado

Interpretar fórmulas possuem ocorrências de quantificadores não é tão simples quanto interpretar fórmulas que possuem apenas ocorrências de conectivos.

No caso dos quantificadores, usualmente, a interpretação exige uma boa dose de imaginação.

Interpretações para um enunciado

Definição: Uma *interpretação* para um enunciado simbolizado φ, que possui ocorrência de quantificadores e somente propriedades, consiste dos seguintes itens:

- um domínio D correspondente aos quantificadores que ocorre em φ;
- significados em D para todas as propriedades $p_1, p_2, \ldots, p_n$ que ocorrem em nos componentes de φ.

Para que uma interpretação esteja definida, devemos explicitar exatamente a que domínio de avaliação os quantificadores correspondem e quais são exatamente as propriedades consideradas.

Exercício 3

Simbolize cada sentença abaixo e determine uma interpretação na qual ela é V e outra na qual ela é F.

(i) tudo é número

(ii) há átomos

(iii) cada um é atleta

(iv) alguns são inteligentes

(v) qualquer um é par

(vi) todos são primos

Exercício 4

Considere a seguinte interpretação:

D	:	formado por todos os números naturais não nulos
$p(x)$	:	x é par
$q(x)$	:	x é ímpar
$r(x)$	:	x é primo
$s(x)$	:	x é positivo
$t(x)$	:	x é negativo
$u(x)$	:	x é quadrado perfeito
$v(x)$	:	x igual a 2

Para cada fórmula abaixo, determine o seu significado de acordo com esta interpretação e a avalie como V ou F:

Exercício 4

(i) $\exists x p(x)$

(ii) $\forall x q(x)$

(iii) $\exists x q(x) \wedge \exists y \neg r(y)$

(iv) $\forall x[s(x) \vee t(x)]$

(v) $\forall x[u(x) \rightarrow t(x)]$

(vi) $\forall x\{[p(x) \wedge r(x)] \leftrightarrow v(x)\}$

(vii) $\exists x[p(x) \wedge u(x) \wedge \neg v(x)] \wedge \exists y[q(y) \wedge \neg u(y) \wedge t(y)]$

Exercício 5

Para cada fórmula abaixo, determine uma interpretação cujo domínio seja o conjunto de todos os número naturais não nulos, na qual a fórmula seja V e uma outra na qual ela seja F.

(i) $\exists x p(x) \to \exists y q(y)$

(ii) $\exists x p(x) \to \forall y p(y)$

(iii) $\exists x p(x) \to \forall y q(y)$

(iv) $\forall x p(x) \to \forall y q(y)$

(v) $[\exists y p(y) \wedge \exists z q(z)] \to \exists x [p(x) \wedge q(x)]$

(vi) $\forall x [p(x) \vee q(x)] \to [\forall y p(y) \vee \forall z q(z)]$

Parte 4

Exercícios

Mais exercícios!

Lista de Exercícios – Aula 12

Petrucio Viana
GAN-IME-UFF

Exercício 1 Simbolize os argumentos a seguir em LQ e, para cada um, apresente uma interpretação na qual as premissas são V e a conclusão é F.

1. Todos os mamíferos são animais. Alguns mamíferos são bípedes. Assim, alguns animais são bípedes.
2. Todos os aristotélicos simpatizam com todos os aquinianos. Nenhum aristélico simpatizam com nenhum platonista. Alguém é aristotélico. Deste modo, nenhum dos aquinianos é platonista.
3. Alguns estudantes bebem cerveja. Alguns bobões não bebem cerveja. Consequentemente, alguns estudantes não são bobos.
