# Lógica & Computabilidade 2025-2

Prova 2

14 de novembro de 2025

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

**Justifique todas as suas respostas!**

**Definição.** Um conjunto $\Sigma$ de fórmulas é *satisfazível* se existe uma estrutura e uma atribuição para essa estrutura que satisfaçam todo o $\Sigma$ **simultaneamente**. Dizemos que $\Sigma$ é *finitamente satisfazível* se todo subconjunto **finito** de $\Sigma$ é satisfazível.

**Use** o seguinte teorema à vontade nessa prova (sem precisar provar):

**Teorema** (da Compacidade)**.** *$\Sigma$ é satisfazível se, e somente se, $\Sigma$ é finitamente satisfazível.*

**Questão 1** (2 pontos)**.** Prove ou refute (sendo $P$, $Q$ e $R$ símbolos para relação unária e $c$ símbolo para constante):

$$[(\forall x\,(P(x)) \to Q(c)]\,,\ [(\forall x\,P(x)) \lor (\forall x\,R(x))]\,,\ [\exists x\,(\neg R(x))] \quad \vdash \quad Q(c)$$

**Questão 2.** Em uma assinatura com um símbolo para relação binária $R$, considere a fórmula $\varphi := \alpha \land \beta \land \gamma$, onde

$$\alpha := \forall x\, \neg(xRx) \qquad \beta := \forall x \exists y\, (xRy) \qquad \gamma := \forall x \forall y \forall z\, [(xRy \land yRz) \to xRz]$$

**a** (2 pontos)**.** Prove que $\varphi$ é satisfazível.

**b** (2 pontos)**.** Prove que nenhuma estrutura com universo finito satisfaz $\varphi$.

**Questão 3** (2 pontos)**.** Sejam $\Sigma_0$, $\Sigma_1$ conjuntos de sentenças tais que nenhuma estrutura satisfaz ambos $\Sigma_0$ e $\Sigma_1$ ao mesmo tempo.

Prove que existe uma sentença $\varphi$ tal que $\Sigma_0 \vDash \varphi$ e $\Sigma_1 \vDash \neg\varphi$.

*Dica*: $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ não é satisfazível; logo, pelo Teorema da Compacidade…

**Questão 4** (2 pontos)**.** Assuma, sem prova, o seguinte teorema (cuja prova levou décadas para ser encontrada e outras para ser aceita):

**Teorema** (das 4 Cores)**.** *Todo grafo simples (i.e., não direcionado, sem arestas paralelas e sem "loops") e planar (i.e., que pode ser desenhado no plano sem cruzamentos de arestas)* finito *é 4-colorível (i.e., pode ter seus vértices coloridos usando 4 cores, de maneira que vértices adjacentes recebam cores distintas).*

Dado um grafo simples $G$ com conjuntos $V(G)$ de vértices (possivelmente infinito, para essa questão) e $E(G)$ de arestas, considere uma assinatura $\mathcal{A}_G$ composta por

- um símbolo para relação binária $R$.
- símbolos para relações unárias $C_0$, $C_1$, $C_2$ e $C_3$
- um símbolo para constante $c_v$ para cada $v \in V(G)$

Seja $\Sigma_G$ o conjunto composto (apenas) das seguintes sentenças de $\mathcal{A}_G$:

- a sentença $\forall x \neg(xRx)$
- a sentença $\forall x \forall y \, (xRy \leftrightarrow yRx)$
- para cada dois vértices $u \neq v \in V(G)$, a sentença $c_u \neq c_v$
- para cada aresta $uv \in E(G)$, a sentença $c_u R c_v$
- a sentença $\forall x \, (C_0(x) \vee C_1(x) \vee C_2(x) \vee C_3(x))$
- para cada $0 \leqslant i < j \leqslant 3$, a sentença $\forall x \neg(C_i(x) \wedge C_j(x))$
- para cada $0 \leqslant i \leqslant 3$, a sentença $\forall x \forall y \, ((C_i(x) \wedge C_i(y)) \rightarrow (\neg(xRy)))$

(Intuitivamente, essas sentenças dizem respectivamente: "não há loops", "as arestas não são direcionadas", "constantes vindas de vértices distintos são interpretadas distintamente", "constantes vindas de vértices adjacentes em $G$ são interpretadas por elementos adjacentes do domínio", "cada elemento do domínio tem pelo menos uma cor", "cada elemento do domínio tem no máximo uma cor" e "elementos do domínio com mesma cor não podem ser adjacentes").

Assim, $G$ é um grafo 4-colorível se, e somente se, $\Sigma_G$ é satisfazível (você não precisa provar isso!).

Prove que todo grafo planar *infinito* é 4-colorível.