Ex: Indique onde no quadro abaixo cada fórmula dada se encontra

$\varphi = p$

$\psi = p \to q$

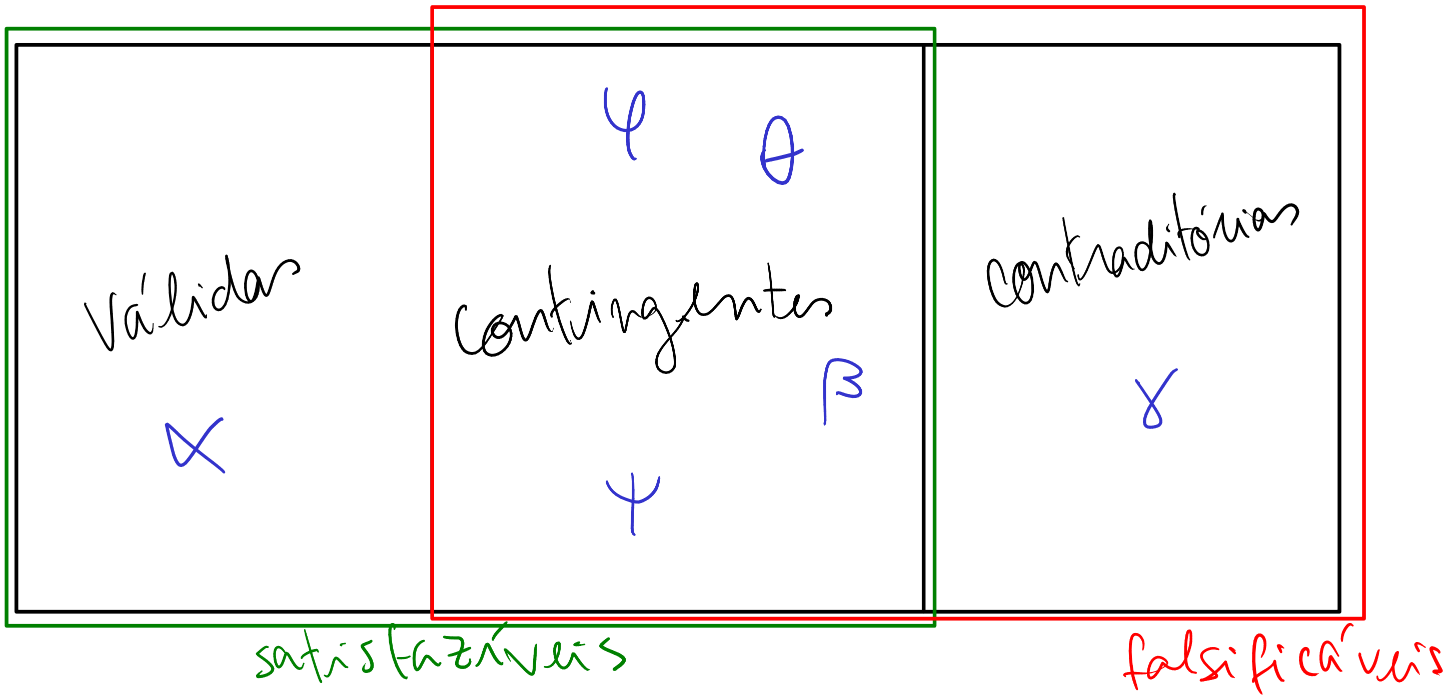
$\alpha = p \to p$

$\beta = p \vee (q \wedge \neg q)$

$\gamma = q \wedge \neg q$

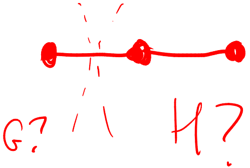
$\theta = ([\{\neg p\} \vee \{\neg r\}] \wedge p) \vee ([r \leftrightarrow q] \wedge [q \wedge p])$

```
∨
├ ∧
│ ├ ∨
│ │ ├ ¬
│ │ │ └ p
│ │ └ ¬
│ │   └ r
│ └ p
└ ∧
  ├ ↔
  │ ├ r
  │ └ q
  └ ∧
    ├ q
    └ p
```

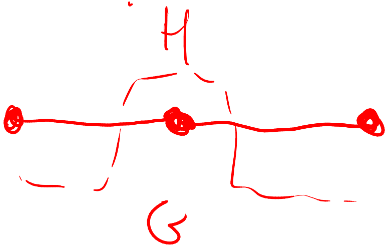

Válidas
α
Contingentes
φ
θ
β
ψ
contraditórias
γ
satisfazíveis
falsificáveis

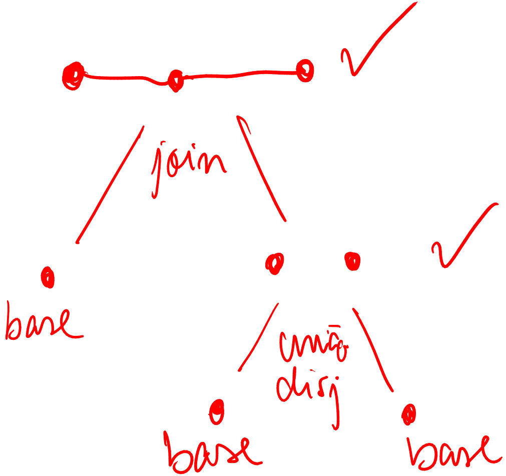
([{ ¬	p}	∨	{ ¬	r}]	∧	p)	∨	([r	↔	q]	∧	[q	∧	p])
F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	F	V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	F	V	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F	F	F	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	F	F	F	F	F	F	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F	F	F	F	V	F	F	F	F	F

Rascunho. Lista 1, Questão dos cografos



é cografo




join
base
união
disj
base
base

Consequência Semântica

def: Sejam Σ um conjunto de fórmulas e φ uma fórmula. Dizemos que φ é consequência semântica de Σ, denotado

$$\Sigma \models \varphi$$

se φ for verdadeira em qualquer

contexto onde todas as fórmulas de Σ sejam verdadeiras (simultaneamente)

(Notação do passado: "φ é válida" é denotado $\models \varphi$)

É comum omitir as chaves $\}, \{$ do conjunto Σ à esquerda de $\models$

Ex: Prove que (a) $\{p, p \to q\} \models q$ Modus Ponens

"Para qualquer contexto c, se $c(p) = V$ e $c(p \to q) = V$, então $c(q) = V$."

Seja c um contexto.

Lembrete: $c(p \to q) = \begin{cases} V, & \text{se } c(p) = F \\ c(q), & \text{c.c.} \end{cases}$

Logo, como por hipótese temos $c(p) = V$, concluímos $c(p \to q) = c(q)$.
Mas $c(p \to q) = V$ por hipótese $\blacksquare$

(b) $\neg p,\ p \to q \not\models q$

"Não é verdade que: para todo contexto c, se $c(\neg p) = V$ e $c(p \to q) = V$ então $c(q) = V$"

ou seja

"Existe um contexto c tal que não é verdade que: se $c(\neg p)=V$ e $c(p\to q)=V$ então $c(q)=V$"

ou seja

"Existe um contexto c tal que $c(\neg p)=V$ e $c(p\to q)=V$ e $c(q)=F$"

c é chamado contramodelo

Prova: $c(q)=F$, $c(p)=F$. De fato $c(\neg p)=V$ e $c(p\to q)=V$.

(c) Para qualquer fórmula φ: $p, \neg p \models \varphi$.

Princípio da Explosão ou Ex Falso Quodlibet

Seja c tal que $c(p) = V$ e $c(\neg p) = V$.

Logo $c(p) = F$! Logo tal c é impossível! Mas... $c(\varphi) = V$ ... ??

Vacuidade!! O que queremos provar

é Para qualquer contexto c:

$$\underbrace{\text{Se } \underbrace{c(p)=V \text{ e } c(\neg p)=V}_{\text{sempre falso}} \text{ então } c(\varphi)=V}_{\text{sempre verdadeira}}$$

d) Se φ é válida, então para qualquer Σ temos

$$\Sigma \models \varphi$$

Seja c contexto tal que toda fórmula de Σ seja V em c.

Como φ é válida, temos $c(\varphi) = V$.

e) $p \to q \models (\neg q) \to (\neg p)$. Contrapositiva (uma das direções)

Seja c tal que $c(p \to q) = V$.

Como $c(p \to q) = \begin{cases} V, & \text{se } c(p) = F \\ c(q), & \text{c.c.} \end{cases}$

Temos dois casos:

1) $c(p) = F$

$$c((\neg q) \to (\neg p)) = \begin{cases} V & \text{se } c(\neg q) = F \\ c(\neg p), & \text{c. c.} \end{cases}$$

Como $c(\neg p) = V$, temos $c((\neg q) \to (\neg p)) = V$.

2) $c(p) = V$ e $c(q) = V$

$$c((\neg q) \to (\neg p)) = \begin{cases} V, & \text{se } c(\neg q) = F \\ \underline{\hspace{6cm}} & \end{cases}$$

Logo $c((\neg q) \to (\neg p)) = V$.

Como vimos, "validade" é um caso particular de "consequência semântica".

Quando Σ é finito, vale a recíproca!

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \models \varphi$$

$$\iff$$

$$\models (\sigma_0 \wedge \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \cdots \wedge \sigma_n) \to \varphi$$