Recap: são fórmulas?

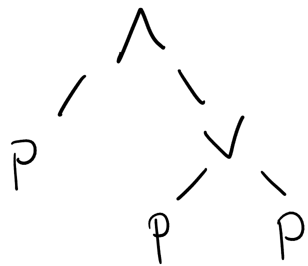
1) (p) Não

2) $(p \to q \vee r)$ Não, pois $q \vee r$ não é fórmula

3) $(p \wedge (p \vee p))$ $(R\wedge)$ com $\varphi = p$ (B)
$\psi = (p \vee p)$ $(R\vee)$ com
$\varphi = p$
$\psi = p$

4) $q \vee (\neg q)$ Não

Novamente (3) acima:



árvore!

$$(p \wedge (p \vee p))$$

Comentário: Definições recursivas sempre estão associadas a árvores de maneira análoga a essa (essa é uma das "graças" de defs. recursivas).

<u>Exercício (?)</u>: A definição de fórmulas tem leitura única!

<u>Def</u>: • Uma fórmula é <u>atômica</u> se é um símbolo proposicional, e <u>molecular</u> ou <u>composta</u> nos outros casos;

- Dada uma fórmula composta, pela leitura única, exatamente um dos casos (a) ou (b) abaixo ocorre

a) há um único φ tal que:
   - a fórmula é $(\neg\varphi)$
   - φ é fórmula

b) há únicos $\varphi, *, \psi$ tais que:
   - a fórmula é $(\varphi * \psi)$
   - φ, ψ são fórmulas
   - $*$ é $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

No caso (a), diremos que a fórmula é uma negação e $\neg$ é seu conectivo principal

No caso (b), se ...

- $*$ é $\wedge$, diremos que a fórmula é conjunção
- $*$ é $\vee$, " " " " é disjunção
- $*$ é $\to$, " " " " " implicação
- $*$ é $\leftrightarrow$, " " " " " biimplicação

Em qualquer um destes casos, * é o <u>conectivo principal</u>.

Em outras palavras: olhando para a fórmula como uma árvore, a raiz determina sua classificação: atômica, se for símb. prop., e molecular nos outros casos, sendo classificada pelo conectivo que aparece na raiz.

Comentário / Convenção

Formalmente as fórmulas são dadas pela definição da Aula 4, mas informalmente podemos simplificar a notação em alguns casos, por exemplo omitindo parênteses externos e combinando que $\neg$ se "aplica" à menor fórmula à sua direita

Ex: • $p \to \neg q$ é fórmula informal

$(p \to (\neg q))$

• $\neg r \vee s$ é também

$((\neg r) \vee s)$

Curiosidade: Há notações lineares sem ambiguidade e sem parênteses!
(e sem "discórdia" de precedência de conectivos)

- Prefixo (Polonesa)

$(p \wedge (q \vee s)) \rightsquigarrow \wedge p \vee q s$

- Posfixo (Polonesa reversa)

$(p \wedge (q \vee s)) \longrightarrow p\, q\, s \vee \wedge$

— + —

<u>def^n</u>: Uma subfórmula de uma fórmula φ é uma subsequência (um "pedaço contíguo") de φ que também

é fórmula.

Cuidado! Não funciona bem com a notação informal! $\neg r \vee s$ não é subfórmula de $\neg\neg r \vee s$

Na notação "árvore", as subfórmulas de uma fórmula são simplesmente as subárvores!

Pergunta: E nas notações polonesas?

def v2 (recursiva) As subfórmulas de φ são dadas recursivamente:

B) Se φ é atômica, então φ é sua única subfórmula

R¬) Se φ é $(\neg\psi)$, então as subfórmulas de φ são φ e as subfórmulas de ψ

R*) Se φ é $(\psi * \beta)$, então as subfórmulas de φ são φ e as subfórmulas de ψ e as subfórmulas de β

Ex: As subfórmulas de

$$\varphi = \Big(\underbrace{([\{r \vee q\} \wedge p] \leftrightarrow [p \leftrightarrow r])}_{\psi} \rightarrow \underbrace{(r \rightarrow q)}_{\beta}\Big)$$

são ... φ e as subfórmulas de ψ e as de β

as subf. de ψ são ψ

e as de $[\{r \vee q\} \wedge p]$

e as de $[p \Leftrightarrow r]$

as subf de β são β

e as de r

e as de q

: tedioso ☺

Alternativa: $\varphi =$

```
→
├─ ↔
│  ├─ ∧
│  │  ├─ ∨
│  │  │  ├─ r
│  │  │  └─ q
│  │  └─ p
│  └─ ↔
│     ├─ p
│     └─ r
└─ →
   ├─ r
   └─ q
```

13 subfórmulas, mas apenas 9 distintas

Simbolização / Formalização de linguagem natural p/ LC

Ao menos um dos números, 2, 3, 4 e 6 é primo

Legenda:
- p_2: "2 é primo"
- p_3: "3 é primo"
- p_4: "4 é primo"
- p_6: "6 é primo"

$$p_2 \vee p_3 \vee p_4 \vee p_6$$

$$(((p_2 \vee p_3) \vee p_4) \vee p_6)$$

formalmente

Note que para a LC os símbolos proposicionais P_2, P_3, P_4, P_6 são completamente opacos, caixas pretas sem nenhuma estrutura visível.

O mesmo valeria se tivéssemos escolhido "2 é primo", "3 é primo", etc, como símbolos proposicionais (esquisitos)

Todos os números naturais são positivos

Parece que precisamos de infinitos símbolos proposicionais; para cada $n \in \mathbb{N}$,

P_n: n é positivo → não é problema

E a frase seria simbolizada pela "fórmula infinita"

$P_0 \wedge P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots$ → ilegal! não temos fórmulas infinitas!