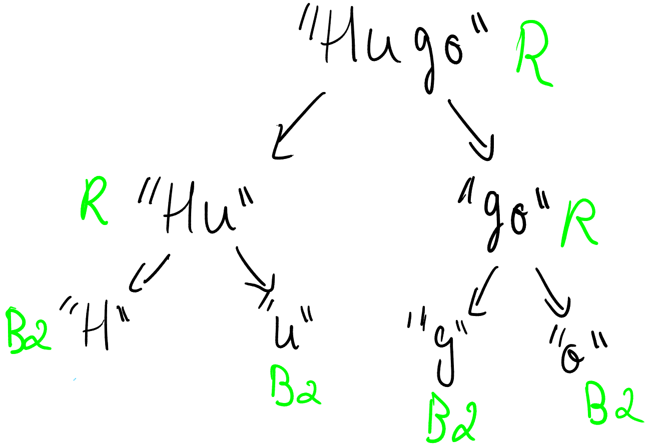
hugonobrega.com/logica
↳ Discord
↳ link p/ Google Form (#anuncios)

— x —

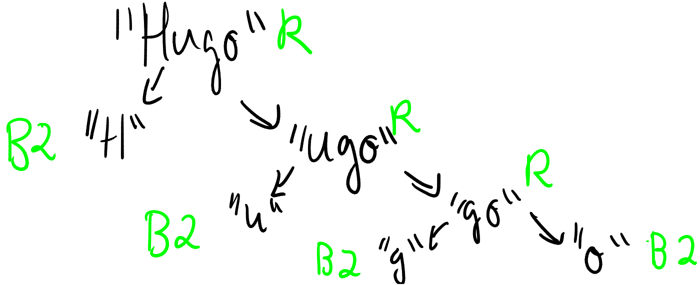
cont. aula 2
pela def rec 2 de palavra, no alf pt-br, "Hugo" é palavra:

1)



várias construções

2)



Mas pela def rec 1,

$$\text{"Hugo"}$$
$$\downarrow$$
$$\underbrace{\text{"Hug"}} \frown \langle o \rangle$$
$$\downarrow$$
$$(\text{"Hu"} \frown \langle g \rangle) \frown \langle o \rangle$$
$$\downarrow$$
$$((\text{"H"} \frown \langle u \rangle) \frown \langle g \rangle) \frown \langle o \rangle$$
$$\downarrow$$
$$(((\underset{B}{\varepsilon} \frown \langle H \rangle)_{R} \frown \langle u \rangle)_{R} \frown \langle g \rangle)_{R} \frown \langle o \rangle_{R}$$

única forma

Indução

"Nada mais é" do que a aplicação do método de recursão onde o que está sendo construído é uma (na verdade várias!) prova matemática.

Explicitando o que isso quer dizer (nos moldes da aula 2):

- Podemos ver a prova como tendo vários (talvez infinitos!) CASOS, ou seja, são várias provas.
- Entre as provas pode haver uma relação de DEPENDÊNCIA
- As provas podem ser ORGANIZADOS de maneira que sempre que uma prova A depender de uma prova B, então

a prova B vem ANTES da prova A na organização.

↳ então, para fazer uma prova que dependa de outras, podemos supor que essas outras já foram feitas (Hipótese de Indução). Na prática, é comum supor que todas as provas anteriores já foram feitas.

— há provas que não dependem de outras (Base da indução).

Exemplo:

1) Toda A.E.B. tem quantidade ímpar de nós.

Rascunho: casos: Cada árvore estritamente binária dá um caso.

organização: como na definição recursiva!

- na base $\bullet$

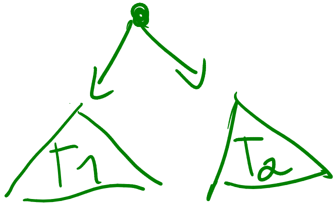
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ T_1 & & T_2 \end{tikzcd}$$

vem <u>depois</u> de T_1 e T_2

Prova do ex 1: por indução "estrutural"

<u>Base</u>: $\bullet$ tem nº ímpar de nós. (1 é ímpar)

Indutivo: T =



Quero provar: T tem nº ímpar de nós

Posso supor:

HI) T_1 e T_2 têm nºs ímpares de nós

Logo T tem $1 + (\text{quant. nós } T_1) + (\text{quant. nós } T_2)$

que é um número 1 + ímpar + ímpar = ímpar. $\blacksquare$

2) "um grafo não direcionado, simples completo com $n \geq 1$ vértices tem $\frac{n \cdot (n-1)}{2} =: \binom{n}{2}$ arestas"

def recursiva 1)

B) $\bullet$

R) 

, onde G é grafo completo.

Prova (indutiva do Ex2) usando essa organização

B) •, com $n=1$, tem $\frac{1\cdot(1-1)}{2} = 0$ aresta ✓

I) 

$= H$, com n vértices

Quero provar: H tem $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas

Posso supor:

HI) G (que tem $n-1$ vértices) tem $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ arestas.

As arestas de H são:

1) as que já estavam em G

→XOR —as

2) as adicionadas quando adicionamos o vértice universal

Pela HI, há $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ do tipo 1.

Há $n-1$ do tipo 2 (uma para cada

vértice de G).

Logo há $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} + n-1 =$

$$= \frac{(n-1)(n-2) + 2\cdot(n-1)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2+2)}{2}$$

$= \dfrac{(n-1)\cdot n}{2}$ arestas $\blacksquare$

Alternativa (por motivos didáticos)

def. Nc. 2)

B) $\bullet$ R) $G \equiv H$, onde G & H são grafos completos

todas as arestas possíveis ("join" de G & H)

Prova do Ex 2 usando essa ordenação:

B) Igual acima

R) $G \overset{\text{join}}{\equiv} H = K$, com n vértices

Quero provar: K tem $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ arestas

Posso supor:

HI) G, que tem q vértices, tem $\frac{q(q-1)}{2}$ arestas

H, que tem ℓ vértices, tem $\frac{\ell \cdot (\ell-1)}{2}$ arestas

Note que $q + \ell = n$

Quero provar: K tem $\frac{(q+\ell)(q+\ell-1)}{2}$ arestas.

As arestas de K têm 3 tipos (exclusivamente)

1) arestas de G

2) " " H

3) "que cruzam" entre G & H

Há (por HI) $\frac{q\cdot(q-1)}{2}$ de tipo 1

$\frac{l\cdot(l-1)}{2}$ de tipo 2

e $q\cdot l$ de tipo 3 (pois cada uma liga 1 vértice de G com 1 de H)

Somando, há

$$\frac{q(q-1)}{2} + \frac{l(l-1)}{2} + q\cdot l = \frac{q^2-q+l^2-l+2ql}{2}$$

$$= \frac{(q+\ell)(q+\ell-1)}{2} \quad \text{arestas}$$

Note que em particular provamos uma identidade de Mat Comb/Disc.:

$$\binom{q}{2} + \binom{\ell}{2} + q\ell = \binom{q+\ell}{2}$$

Ex 3: $\forall n \in \mathbb{N} \left(3 \mid (4^n - 1) \right)$

"divide"

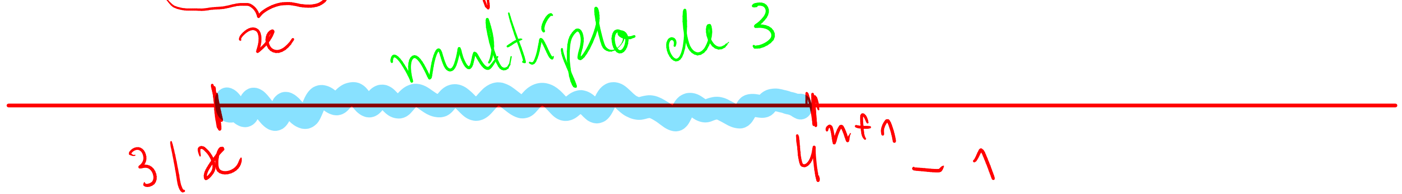
[forma "roubada": $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$]

Um caso para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como organizar?

Se eu soubesse resolver alguns casos, como "usar" isso para resolver outros mais facilmente?

Rascunho: se eu soubesse que $3 \mid \underbrace{(4^n - 1)}_{x}$ para um certo n,



Analisemos a distância:

$$(4^{n+1}-1)-(4^n-1) = 4^{n+1}-4^n$$

$$= 4^n(4-1) = 3\cdot 4^n$$

Eureka!

Exercício: Escreva a prova do Ex 3

<u>Ex 4</u>: Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que:

• $a, b > 0$ • $a > b$ • $1 + \frac{a}{b} \leq \left(\frac{a}{b}\right)^2$

Seja $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a "função de Fibonacci":

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-2) + F(n-1), & \text{c.c.} \end{cases}$$

Prove que: $\forall n \in \mathbb{N} \left(F(n) < \left(\frac{a}{b}\right)^n \right)$.