# Números Inteiros e Criptografia, PLE 2020

Lista de Exercícios 1

Enviar as soluções das questões marcadas com *
para `hugonobrega@dcc.ufrj.br` **até 1º de setembro às 8:00**

**Questão 1.** Modele as afirmações em português a seguir usando os símbolos lógicos vistos em aula. Observe os exemplos.

*Exemplo.* "Se fizer sol e eu não tiver que estudar, eu vou tomar sol na janela".

Usando $S$: "fizer sol", $E$: "eu tiver que estudar", $J$: "vou tomar sol na janela", podemos modelar a afirmação da seguinte forma:

$$(S \wedge \neg E) \to J.$$

*Exemplo.* "Nem todo brasileiro gosta de samba e futebol, e os que gostam de futebol nem sempre são flamenguistas"

Assumindo que os valores possíveis para a variável $x$ são todas as pessoas, e usando $B(x)$: "$x$ é brasileiro", $S(x)$: "$x$ gosta de samba", $F(x)$: "$x$ gosta de futebol" e $M(x)$: "$x$ é flamenguista", podemos modelar a afirmação da seguinte forma:

$$\exists x[B(x) \wedge (\neg S(x) \vee \neg F(x))] \quad \wedge \quad \exists x[B(x) \wedge F(x) \wedge \neg M(x)].$$

*** a.** Sempre que um número inteiro é par e maior que 2, ele é a soma de dois primos.

*** b.** Todo dia eu como manga ou tomo leite, mas nunca ambos no mesmo dia.

**Questão 2.** Usando tabelas de verdade, mostre que as seguintes fórmulas são sempre verdadeiras:

**a.** $p \to (q \to p)$

**b.** $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \to [(p \vee r) \to (q \vee s)]$

*** c.** $[p \to (q \to r)] \longleftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$

**d.** $[p \wedge (p \to q)] \to q$

**Questão 3.** Usando apenas os conectivos e os quantificadores vistos em sala, escreva fórmulas que expressem os seguintes outros "quantificadores". Observe o exemplo.

*Exemplo.* "Existe um único $x$ tal que $\varphi(x)$".

$$\exists x(\varphi(x)) \ \wedge \ \forall y \forall z[(\varphi(y) \wedge \varphi(z)) \to y = z].$$

*** a.** Existem pelo menos dois $x$ tais que $\varphi(x)$.

*** b.** Existem no máximo dois $x$ tais que $\varphi(x)$.

*** c.** Existem exatamente dois $x$ tais que $\varphi(x)$.

**Questão 4.** Escreva a negação das seguintes afirmações em português, sem usar expressões similares a "não existe ..." ou "não é o caso que para todo ...":

**a.** Existe um número inteiro que é primo ou igual a 15.

*** b.** Todo número real é o resultado da divisão de dois inteiros.

**c.** Para qualquer número real não-nulo $x$ existe um número real $y$ tal que o produto de $x$ e $y$ é igual a 1.

**Questão 5.** Suponha que os possíveis valores para as variáveis $x$ e $y$ sejam todas os carros. Considerando que $R(x, y)$ significa "$x$ é pelo menos tão rápido quanto $y$", $C(x, y)$ significa "$x$ é pelo menos tão caro quanto $y$" e $V(x, y)$ significa "$x$ é pelo menos tão velho quanto $y$", traduza as fórmulas abaixo para o português (tente formular suas frases da forma mais natural possível):

*** a.** $\forall x \exists y [V(y, x) \wedge C(y, x) \wedge R(x, y)]$

*** b.** $\exists x \forall y (V(y, x))$

*** c.** $\neg[\forall x \forall y (R(x, y) \longleftrightarrow C(x, y))]$

***Questão 6.** Seja $x$ um número real. Dizemos que $x$ é *gelatinoso* se ele é fleumático e para todo número natural $n$ existe algum número real $y$ tal que $y^2$ encapsula superiormente $x$ ou $y + n$ encapsula inferiormente $x$. Como você caracterizaria um número real não-gelatinoso?

***Questão 7.** Sejam $X$, $Y$ e $Z$ conjuntos. Prove as seguintes afirmações (note que são duas afirmações; uma para cada igualdade).

$$(X \cup Y) \setminus X = Y \setminus (X \cap Y) = Y \setminus X.$$

**Questão 8.**

*** a.** Usando tabelas de verdade, mostre que a seguinte fórmula é sempre verdadeira: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

*** b.** Sejam $P$, $Q$ e $R$ conjuntos. Prove a seguinte afirmação, usando o item anterior: $P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$.