

# Números inteiros e criptografia – UFRJ

Revisão de tópicos do ensino médio

Gentilmente cedida pelo Prof. Collier

1. Sejam  $b$  um número real e  $m$  e  $n$  inteiros. Prove que:

(a)  $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$ ;

(b)  $(b^m)^n = b^{mn}$ .

2. Sejam  $b$  um número real e  $k$ ,  $m$  e  $n$  inteiros. Escreva  $(b^{k^m})^{k^n}$  como uma potência na base  $b$ .

3. Usando as fórmulas dos exercícios anteriores simplifique os números abaixo o máximo possível, escrevendo-os como potências de uma mesma base:

(a)  $2^5 \cdot 3^5$ ;

(c)  $(2^{3^4})^{3^9}$ ;

(b)  $(2^5)^6 \cdot 2^7$ ;

(d)  $(2^{3^4})^{5^4}$ .

4. Determine o inteiro  $n$  tal que  $(3^{2^8})^{2^5} \cdot (3^{2^6})^{2^7}$  é igual a  $3^{2^n}$ .

5. Calcule os seguintes produtos, usando a distributividade da multiplicação:

(a)  $(x - y)(x + y)$ ;

(b)  $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ ;

(c)  $(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$ .

6. Ilustre a identidade do item (a) do exercícios anterior usando um desenho.

7. Seguindo o padrão do exercício 5, adivinhe quanto dá o produto

$$(x - y)(y^{n-1} + xy^{n-2} + x^2y^{n-3} + \dots + x^{n-2}y + x^{n-1})$$

e prove que seu resultado está correto aplicando a fórmula da soma de uma progressão geométrica a

$$y^{n-1} + xy^{n-2} + x^2y^{n-3} + \dots + x^{n-2}y + x^{n-1}.$$

**Extra:** Um número inteiro positivo  $m$  é chamado de *perfeito* se for igual ao dobro da soma de todos os seu fatores. Por exemplo, 6 é perfeito, porque seus fatores são 1, 2, 3 e 6, mas  $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \cdot 6$ .

Supondo que  $2^n - 1$  é um número primo, calcule todos os fatores de  $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$  e use a fórmula da soma de uma progressão geométrica para mostrar que  $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$  é perfeito.

**Curiosidade:** Euler provou que todos os números perfeitos pares são da forma acima e até hoje não se conseguiu descobrir nenhum número perfeito ímpar. Mas sabe-se que se um número perfeito ímpar existir, ele tem que ter pelo menos 101 fatores primos, escolhidos entre pelo menos 10 primos distintos, e o maior dos fatores primos tem que ser maior que  $10^8$ .