Matemática Discreta 2025-2

Prova 3

11 de dezembro de 2025

Justifique todas as suas respostas!
Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1 (3 pontos)**.**

Definição. Seja G um grafo.

1. Um *conjunto independente* em G é um conjunto X de vértices de G tais que o subgrafo de G induzido por X não tem arestas.
2. Uma *cobertura* (das arestas) de G é um conjunto Y de vértices de G tais que toda aresta de G tem pelo menos uma das suas extremidades no conjunto Y.

Seja X um subconjunto dos vértices de um grafo G. Prove que X é um conjunto independente *maximal* (i.e., um conjunto independente que não é subconjunto de nenhum outro conjunto independente maior) se, e somente se, $V(G) \setminus X$ é uma cobertura *minimal* (i.e., uma cobertura que não contém como subconjunto nenhuma outra cobertura menor).

Questão 2. Seja G um grafo.

a (2 pontos)**.** Suponha que todos os vértices de G tenham grau par. Mostre que existem $k \in \mathbb{N}$ e subgrafos $H_0, H_1, \ldots, H_{k-1}$ de G tais que

- cada H_i é um ciclo;
- para todos $i \neq j$, H_i e H_j não têm arestas em comum (mas podem ter vértices em comum);
- toda aresta de G é aresta de algum H_i.

b (2 pontos)**.** Seja $k > 0$ e suponha que G tenha exatamente $2k$ vértices de grau ímpar. Mostre que existem k subgrafos $H_0, H_1, \ldots, H_{k-1}$ de G tais que

- cada H_i é um grafo com exatamente 2 vértices de grau ímpar;
- para todos $i \neq j$, H_i e H_j não têm arestas em comum (mas podem ter vértices em comum);
- toda aresta de G é aresta de algum H_i.

Questão 3.

Definição. Uma *floresta* é um grafo sem ciclos (não necessariamente conexo).

a (2 pontos)**.** Sejam G um grafo e e uma aresta de G. Prove que G tem pelo menos uma floresta geradora maximal que contém a aresta e (uma *floresta geradora* é um subgrafo de G que é uma floresta e que tem todos os vértices de G).

b (2 pontos)**.** Prove que um grafo é uma floresta se, e somente se, ele tem uma única floresta geradora maximal.