



Matemática Discreta 2025-2

Prova 2

6 de novembro de 2025

Justifique todas as suas respostas!

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1. Uma sequência *ternária* é uma sequência finita formada por elementos 0, 1 e 2.

Seja $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função tal que $T(n)$ é a quantidade de sequências ternárias de comprimento n nas quais **não** ocorre o padrão 012 consecutivamente.

a (2 pontos). Dê um argumento que justifique por quê a expressão a seguir é uma definição recursiva para T como recorrência linear homogênea

$$T(n) = \begin{cases} 3^n, & \text{se } n \leq 2 \\ 3T(n-1) - T(n-3), & \text{c.c.} \end{cases}$$

b (2 pontos). Encontre na tabela do fim da prova valores r_i , r_j e r_k , e escreva um sistema de equações lineares cuja solução (c_0, c_1, c_2) seja tal que

$$T(n) = c_0 \cdot (r_i)^n + c_1 \cdot (r_j)^n + c_2 \cdot (r_k)^n$$

seja uma forma fechada para T . (Você **não** precisa resolver o sistema!)

c (2 pontos). Dê uma definição recursiva para T como uma recorrência linear não puramente homogênea, cuja parte não homogênea é uma exponencial. Você pode deixar apenas indicados os valores de r_i , r_j e r_k do item anterior.

d (2 pontos). Seja agora $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função tal que $S(n)$ é a quantidade de sequências ternárias de comprimento n nas quais o padrão 012 ocorre consecutivamente **exatamente uma vez**, como os 3 últimos elementos ao final da sequência.

Dê uma definição recursiva para S como uma recorrência linear puramente homogênea.

Questão 2 (3 pontos). Escreva uma definição recursiva de uma função $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cuja forma fechada seja

$$F(n) = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n + n \cdot 3^{n+1}$$

Polinômio	Raízes		
$x^2 - 5x + 6$	2	3	
$x^2 - 4x + 4$	2	2	
$x^2 - 3x - 4$	-1	4	
$x^2 - x - 2$	-1	2	
$x^2 + 5x - 24$	-8	3	
$x^2 + 5x + 3$	-4.3028	-0.69722	
$x^2 + 6x + 8$	-4	-2	
$x^2 + 12x + 27$	-9	-3	
$x^2 + 13x + 36$	-9	-4	
$x^3 - 17x^2 + 92x - 160$	4	5	8
$x^3 - 3x^2 - 36x + 108$	-6	3	6
$x^3 - 3x^2 + 1$	-0.53209	0.65270	2.8794
$x^3 - 3x^2 + 4$	-1	2	2
$x^3 - 5x^2 - 68x + 288$	-8	4	9
$x^3 - 6x^2 + 5x + 12$	-1	3	4
$x^3 - 8x^2 + 21x - 18$	2	3	3
$x^3 - 9x^2 + 24x - 20$	2	2	5
$x^3 - 9x^2 + 25x - 24$	2	3	4
$x^3 + x^2 - 36x - 36$	-6	-1	6
$x^3 + 2x^2 - 71x - 252$	-7	-4	9
$x^3 + 3x^2 - 24x - 80$	-4	-4	5
$x^3 + 4x^2 + 5x + 2$	-2	-1	-1
$x^3 + 4x^2 - 4x - 16$	-4	-2	2
$x^3 + 5x^2 - 62x - 336$	-7	-6	8
$x^3 + 6x^2 - 34x - 80$	-8.8254	-1.9130	4.7384
$x^3 + 9x^2 - 25x - 225$	-9	-5	5
$x^3 + 14x^2 + 9x - 324$	-9	-9	4