



Matemática Discreta 2025-2

Prova 2

6 de novembro de 2025

Justifique todas as suas respostas!

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1. Uma sequência *ternária* é uma sequência finita formada por elementos 0, 1 e 2.

Seja $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função tal que $T(n)$ é a quantidade de sequências ternárias de comprimento n nas quais **não** ocorre o padrão 012 consecutivamente.

a (2 pontos). Dê um argumento que justifique por quê a expressão a seguir é uma definição recursiva para T como recorrência linear homogênea

$$T(n) = \begin{cases} 3^n, & \text{se } n \leq 2 \\ 3T(n-1) - T(n-3), & \text{c.c.} \end{cases}$$

b (2 pontos). Encontre na tabela do fim da prova valores r_i , r_j e r_k , e escreva um sistema de equações lineares cuja solução (c_0, c_1, c_2) seja tal que

$$T(n) = c_0 \cdot (r_i)^n + c_1 \cdot (r_j)^n + c_2 \cdot (r_k)^n$$

seja uma forma fechada para T . (Você **não** precisa resolver o sistema!)

c (2 pontos). Dê uma definição recursiva para T como uma recorrência linear não puramente homogênea, cuja parte não homogênea é uma exponencial. Você pode deixar apenas indicados os valores de r_i , r_j e r_k do item anterior.

d (2 pontos). Seja agora $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função tal que $S(n)$ é a quantidade de sequências ternárias de comprimento n nas quais o padrão 012 ocorre consecutivamente **exatamente uma vez**, como os 3 últimos elementos ao final da sequência.

Dê uma definição recursiva para S como uma recorrência linear puramente homogênea.

Questão 2 (3 pontos). Escreva uma definição recursiva de uma função $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cuja forma fechada seja

$$F(n) = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n + n \cdot 3^{n+1}$$

| Polinômio | Raízes | | |
|---------------------------|----------|----------|--------|
| $x^2 - 5x + 6$ | 2 | 3 | |
| $x^2 - 4x + 4$ | 2 | 2 | |
| $x^2 - 3x - 4$ | -1 | 4 | |
| $x^2 - x - 2$ | -1 | 2 | |
| $x^2 + 5x - 24$ | -8 | 3 | |
| $x^2 + 5x + 3$ | -4.3028 | -0.69722 | |
| $x^2 + 6x + 8$ | -4 | -2 | |
| $x^2 + 12x + 27$ | -9 | -3 | |
| $x^2 + 13x + 36$ | -9 | -4 | |
| $x^3 - 17x^2 + 92x - 160$ | 4 | 5 | 8 |
| $x^3 - 3x^2 - 36x + 108$ | -6 | 3 | 6 |
| $x^3 - 3x^2 + 1$ | -0.53209 | 0.65270 | 2.8794 |
| $x^3 - 3x^2 + 4$ | -1 | 2 | 2 |
| $x^3 - 5x^2 - 68x + 288$ | -8 | 4 | 9 |
| $x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ | -1 | 3 | 4 |
| $x^3 - 8x^2 + 21x - 18$ | 2 | 3 | 3 |
| $x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ | 2 | 2 | 5 |
| $x^3 - 9x^2 + 25x - 24$ | 2 | 3 | 4 |
| $x^3 + x^2 - 36x - 36$ | -6 | -1 | 6 |
| $x^3 + 2x^2 - 71x - 252$ | -7 | -4 | 9 |
| $x^3 + 3x^2 - 24x - 80$ | -4 | -4 | 5 |
| $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ | -2 | -1 | -1 |
| $x^3 + 4x^2 - 4x - 16$ | -4 | -2 | 2 |
| $x^3 + 5x^2 - 62x - 336$ | -7 | -6 | 8 |
| $x^3 + 6x^2 - 34x - 80$ | -8.8254 | -1.9130 | 4.7384 |
| $x^3 + 9x^2 - 25x - 225$ | -9 | -5 | 5 |
| $x^3 + 14x^2 + 9x - 324$ | -9 | -9 | 4 |