INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Matemática Discreta 2025-2

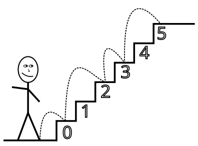
Prova 1

7 de outubro de 2025

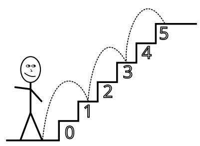
Justifique todas as suas respostas!
Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Questão 1. Fulaninho quer subir uma escadaria de n degraus fazendo uma sequência de *passos*, sendo que cada passo pode ser "pulando nenhum degrau" (i.e., pisando no próximo degrau acima de onde está) ou pulando 1 degrau. Chamemos os passos do primeiro tipo de "pula 0" e do segundo de "pula 1". **Atenção**: Fulaninho não pode pular mais do que 1 degrau a cada passo!

Veja abaixo dois exemplos de subidas diferentes com $n = 6$ degraus.



pula 0, pula 1, pula 0, pula 1



pula 1, pula 1, pula 1

Seja $E : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função tal que $E(n)$ é a quantidade de maneiras diferentes que Fulaninho tem para subir uma escadaria de n degraus. **Vamos combinar que** $E(0) = 1$ (pois a única maneira de subir uma escadaria sem degraus é "não fazer nada").

a (2 pontos)**.** Suponha que Fulaninho já decidiu que quer subir uma escadaria de $n = z + 2u$ degraus fazendo exatamente z passos "tipo 0" e u passos "tipo 1". Encontre x e y (em função de z e u), tais que a quantidade de maneiras que fulaninho pode fazer uma subida assim é

$$\binom{x}{y}.$$

b (2 pontos). Sendo $\mathsf{fibo} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função de Fibonacci, dada por

$$\mathsf{fibo}(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leqslant 1 \\ \mathsf{fibo}(n-1) + \mathsf{fibo}(n-2), & \text{c.c.}, \end{cases}$$

mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$E(n) = \mathsf{fibo}(n+1).$$

Dica: Encontre uma fórmula recursiva para E e use indução para provar o que a questão pede.

c (2 pontos). Prove que para todos naturais $k < n$ temos

$$\mathsf{fibo}(n+1) = (\mathsf{fibo}(k+2) \cdot \mathsf{fibo}(n-k)) + (\mathsf{fibo}(k+1) \cdot \mathsf{fibo}(n-k-1))$$

Dica: Usando o item (b), podemos dar um argumento combinatório olhando para as subidas em escadaria com n degraus. Em cada subida, Fulaninho *pisa* ou (exclusivo!) *não pisa* no degrau k. (*Dica da dica*: Pense apenas em termos de E primeiro, depois "converta" para fibo.)

d (2,5 pontos). Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\mathsf{fibo}(2n+2) = \sum_{z=0}^{n} \sum_{u=0}^{n-z} \left[\binom{z+u}{z} \binom{n-u}{z} \right]$$

Dica: Novamente, considere uma escadaria com $2n+1$ degraus.

- Como essa quantidade é ímpar, para subir a escadaria Fulaninho usa uma quantidade ímpar de passos do tipo "pula 0", digamos $2z+1$. Portanto há um passo "pula 0" que é "central", no sentido que ele tem exatamente z passos "pula 0" antes e z passos "pula 0" depois.
- Nessa situação de $2z+1$ passos "pula 0", quantos passos "pula 1" Fulaninho deu em sua subida completa?
- Antes do passo central, Fulaninho deu z passos "tipo 0" e alguma quantidade u de passos "pula 1".

Questão 2 (2,5 pontos). Suponha que n pessoas estejam enfileiradas em linha reta em alguma ordem fixa (que não vai mudar ao longo dessa questão).

De quantas maneiras podemos escolher $k < n$ pessoas da fila, de maneira que dentre as pessoas escolhidas, não haja nenhum par que estivesse em posições consecutivas na fila?

Dica: experimente modelar a situação desejada como uma equação de várias variáveis naturais com algumas restrições.