Matemática Discreta 2025-2

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 3

Entregue todas as questões marcadas com * até
29 de outubro às **20:00**
Em todas as questões, você sempre pode usar tudo que foi feito em sala ou que apareceu em listas de exercícios anteriores (mesmo questões que você não tenha resolvido), mas deve citar claramente o que está usando.
Nesta lista, você pode usar qualquer resolvedor de equações ou sistemas de equações que desejar.
Eu recomendo o WolframAlpha: `https://www.wolframalpha.com/`
Experimente escrever
`solve x^2 = x + 1`
ou
`solve (ax + by = 0, ax - by = 1)`
ou
`expand (x-2)(x-3)(x-4)`
na caixa de texto!

Questão 1. Encontre formas fechadas para as seguintes relações de recorrência que definem funções com domínio $\mathbb{N}$:

*** a.** $F_a(n) = \begin{cases} 6, & \text{se } n = 0 \\ -13, & \text{se } n = 1 \\ 124, & \text{se } n = 2 \\ -4F_a(n-1) + 3F_a(n-2) + 18F_a(n-3), & \text{se } n \geqslant 3 \end{cases}$

*** b.** $F_b(n) = \begin{cases} 6, & \text{se } n = 0 \\ -13, & \text{se } n = 1 \\ -6F_b(n-1) - 9F_b(n-2) + 25 \cdot 2^n, & \text{se } n \geqslant 2 \end{cases}$

*** c.** $F_c(n) = \begin{cases} 6, & \text{se } n = 0 \\ -13, & \text{se } n = 1 \\ -F_c(n-1) + 6F_c(n-2) + \dfrac{25}{3} \cdot (-3)^n, & \text{se } n \geqslant 2 \end{cases}$

Dica: se você pretende usar um computador para auxiliar na resolução dessa questão, a fim de trabalhar apenas com números inteiros, você pode usar a seguinte versão equivalente da expressão para o caso $n \geqslant 2$:

$$-F_c(n-1) + 6F_c(n-2) + (-1)^n \cdot 25 \cdot 3^{n-1}.$$

d. $F_d(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ F_d(n-1), & \text{c.c.} \end{cases}$

e. $F_e(n) = \begin{cases} 17, & \text{se } n = 0 \\ -3F_e(n-1) + 48, & \text{c.c.} \end{cases}$

f. $F_f(n) = \begin{cases} 30, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n = 1 \\ 1140, & \text{se } n = 2 \\ -3F_f(n-1) + 24F_f(n-2) + 80F_f(n-3), & \text{c.c.} \end{cases}$

g. $F_g(n) = \begin{cases} 9, & \text{se } n = 0 \\ -26, & \text{se } n = 1 \\ 182, & \text{se } n = 2 \\ -3F_g(n-1) + 24F_g(n-2) + 80F_g(n-3) + 2000n - 6000, & \text{c.c.} \end{cases}$

h. $F_h(n) = \begin{cases} 8, & \text{se } n = 0 \\ -29, & \text{se } n = 1 \\ 411, & \text{se } n = 2 \\ -3F_h(n-1) + 24F_h(n-2) + 80F_h(n-3) + 9 \cdot (-4)^n, & \text{c.c.} \end{cases}$

i. $F_i(n) = \begin{cases} 10, & \text{se } n = 0 \\ 80, & \text{se } n = 1 \\ 400, & \text{se } n = 2 \\ 2300, & \text{se } n = 3 \\ 10F_i(n-1) - 25F_i(n-2) + 36F_i(n-4), & \text{c.c.} \end{cases}$

Questão 2. Considere a função $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$F(n) = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

Dê **três** definições recursivas diferentes para F: uma puramente como recorrência linear homogênea de ordem 2, e duas como recorrência linear homogênea de ordem 1 com parte não-homogênea exponencial.

***Questão 3.** Considere a função $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$H(n) = 2^{n+2} + 5n + 3$$

Dê **três** definições recursivas diferentes para H: uma puramente como recorrência linear homogênea de ordem 3, uma como recorrência linear homogênea de ordem 2 com parte não-homogênea exponencial, e uma como recorrência linear homogênea de ordem 1 com parte não-homogênea polinomial de grau 1.

Dica: $2^{n+2} + 5n + 3 = 4 \cdot 2^n + 3 \cdot 1^n + 5 \cdot n \cdot 1^n$.

***Questão 4.** Passado um tempo, o *Fulaninho* da Prova 1 cresceu, e agora ele consegue subir uma escadaria dando passos de três tipos:

- "pula 0", passando de um degrau para o próximo imediatamente acima;
- "pula 1", passando de um degrau para o degrau 2 acima;
- "pula 2", passando de um degrau para o degrau 3 acima.

Encontre números (complexos!) α, c_α, β, c_β, γ e c_γ tais que

$$E(n) = c_\alpha \cdot \alpha^n + c_\beta \cdot \beta^n + c_\gamma \cdot \gamma^n,$$

onde novamente $E(n)$ é a quantidade de maneiras que Fulaninho tem para subir uma escadaria com n degraus.

Continuamos com o combinado que $E(0) = 1$.