Números Inteiros e Criptografia 2023.1

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 3

Entregue todas as questões marcadas com * até
12 de junho às 20:00
Em todas as questões, você sempre pode usar tudo que foi feito em sala ou que apareceu em listas de exercícios anteriores (mesmo questões que você não tenha resolvido), mas deve citar claramente o que está usando.

***Questão 1.** Determine se existem naturais x, y, z que satisfaçam a equação

$$12^x \cdot 50^3 \cdot 15^{-y} = 10^z \cdot 768.$$

dica: $768 = 2^8 \cdot 3$.

Questão 2.

*** a.** Seja $k \geqslant 2$ um natural. Mostre que todos os números $k! + 2, k! + 3, \ldots, k! + k$ são compostos.

*** b.** Refute a seguinte conjectura sobre a "densidade" dos números primos:

"existe um natural m tal que, dentre quaisquer m naturais consecutivos, sempre há pelo menos um primo".

***Questão 3.** Sejam b_1 e b_2 naturais primos entre si. Mostre que para qualquer $d \in \mathbb{N}$, temos: d é um divisor de $b_1 b_2$ sse $d = \text{mdc}(d, b_1) \cdot \text{mdc}(d, b_2)$.

Questão 4. Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 0$. Prove que os primos que dividem $n!$ são exatamente os primos menores ou iguais a n.

Questão 5. Sejam $a, b \geqslant 2$ números naturais. Ao longo desta questão, suponha que as fatorações em primos de a e b são

$$a = \prod_{i=0}^{\ell} p_i^{e_i} \qquad e \qquad b = \prod_{j=0}^{k} q_j^{f_j}.$$

* **a.** Em termos dessas fatorações, como podemos determinar se a é um divisor de b ou não? Em outras palavras, complete e prove a seguinte frase:

$$\text{“}a \mid b \quad \text{sse} \quad \ldots\text{”}$$

onde em "…" você deve apenas falar sobre as fatorações em primos de a e b.

b. Qual a fatoração em primos de $a \cdot b$?

* **c.** Suponha que $a \mid b$ e que $\frac{b}{a} \geqslant 2$. Qual é a fatoração em primos de $\frac{b}{a}$?

d. Qual é a fatoração em primos de $\text{mdc}(a, b)$?

* **e.** Qual é a fatoração em primos de a^2?

* **f.** Dizemos que um número real x é *racional* se existem inteiros y, z, com $z \neq 0$, tais que $y = x \cdot z$, ou em outras palavras, $x = \frac{y}{z}$. Se $x > 0$, podemos tomar $y, z > 0$ também. Prove o seguinte teorema.

Teorema. *Para todo natural $n \geqslant 2$, temos:*
$\sqrt{n}$ é um número racional sse $\sqrt{n}$ é um número natural.

Dica para uma das direções: Se $\sqrt{n} > 0$ é racional, então $\sqrt{n} = \frac{y}{z}$ para algum par de naturais não nulos y, z. Caso tenhamos $z = 1$, nada mais precisa ser provado. Senão, note que temos $n = \frac{y^2}{z^2}$. Pelo item (e), o que se sabe sobre as fatorações em primos de y^2 e z^2? Pelo item (c), o que isso implica sobre a fatoração em primos de n?

* **g.** Prove que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Você pode usar os seguintes fatos: $\sqrt{2}$ é um número real e, para quaisquer reais $x, y > 0$, se $x > y$ então $x^2 > y^2$.

Questão 6. Considere as seguintes funções definidas para naturais positivos:

- $\omega(n)$ = número de fatores primos de n *distintos*.
- $\Omega(n)$ = número de fatores primos de n *contando todas as repetições!*
- $d(n)$ = quantidade de divisores naturais de n.
- $S(n)$ = soma dos divisores naturais de n.
- $X(n) = n^{1234}$
- $Y(n) = 1234 \cdot n$

(A letra ω se chama "ômega minúsculo" e a letra Ω se chama "ômega maiúsculo".)

Exemplos de valores das funções ω, Ω, d, S estão dados na tabela abaixo:

n	fatoração em primos	$\omega(n)$	$\Omega(n)$	divisores naturais	$d(n)$	$S(n)$
1	—	0	0	1	1	1
2	2	1	1	1, 2	2	3
3	3	1	1	1, 3	2	4
4	2^2	1	2	1, 2, 4	3	7
8	2^3	1	3	1, 2, 4, 8	4	15
15	$3 \cdot 5$	2	2	1, 3, 5, 15	4	24
120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	3	5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120	16	360

Dizemos que uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é:

- *aditiva* se, para todos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\text{se } \operatorname{mdc}(n, m) = 1 \text{ então } f(n \cdot m) = f(n) + f(m).$$

- *completamente aditiva* se, para todos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$f(n \cdot m) = f(n) + f(m).$$

- *multiplicativa* se, para todos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\text{se } \operatorname{mdc}(n, m) = 1 \text{ então } f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m).$$

- *completamente multiplicativa* se, para todos $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m).$$

Para cada uma das funções ω, Ω, d, S, X e Y definidas acima, e para cada uma das propriedades *aditiva*, *completamente aditiva*, *multiplicativa* e *completamente multiplicativa*, diga se a função tem a propriedade ou não, provando cada caso positivo e dando um contra-exemplo para cada caso negativo. (*Dica:* poupe um bocado do seu trabalho: argumente que uma função ser *completamente aditiva* já implica que ela seja *aditiva* [também use a contrapositiva dessa implicação!], e analogamente para *completamente multiplicativa* e *multiplicativa*. Em um dos itens, pode ser útil usar a Questão 3 acima.)