Números inteiros e criptografia—UFRJ

Revisão de tópicos do ensino médio

Gentilmente cedida pelo Prof. Collier

1. Sejam b um número real e m e n inteiros. Prove que:
   (a) $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$;
   (b) $(b^m)^n = b^{mn}$.

2. Sejam b um número real e k, m e n inteiros. Escreva $(b^{k^m})^{k^n}$ como uma potência na base b.

3. Usando as fórmulas dos exercícios anteriores simplifique os números abaixo o máximo possível, escrevendo-os como potências de uma mesma base:
   (a) $2^5 \cdot 3^5$;
   (b) $(2^5)^6 \cdot 2^7$;
   (c) $\left(2^{3^4}\right)^{3^9}$;
   (d) $\left(2^{3^4}\right)^{5^4}$.

4. Determine o inteiro n tal que $(3^{2^8})^{2^5} \cdot (3^{2^6})^{2^7}$ seja igual a 3^{2^n}.

5. Calcule os seguintes produtos, usando a distributividade da multiplicação:
   (a) $(x-y)(x+y)$;
   (b) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$;
   (c) $(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$.

6. Ilustre a identidade do item (a) do exercícios anterior usando um desenho.

7. Seguindo o padrão do exercício 5, adivinhe quanto dá o produto

$$(x-y)(y^{n-1}+xy^{n-2}+x^2y^{n-3}+\cdots+x^{n-2}y+x^{n-1})$$

e prove que seu resultado está correto aplicando a fórmula da soma de uma progressão geométrica a

$$y^{n-1}+xy^{n-2}+x^2y^{n-3}+\cdots+x^{n-2}y+x^{n-1}.$$

Extra: Um número inteiro positivo m é chamado de *perfeito* se for igual ao dobro da soma de todos os seu fatores. Por exemplo, 6 é perfeito, porque seus fatores são 1, 2, 3 e 6, e $1+2+3+6=12=2\cdot 6$.

Supondo que 2^n-1 seja um número primo, calcule todos os fatores de $2^{n-1}\cdot(2^n-1)$ e use a fórmula da soma de uma progressão geométrica para mostrar que $2^{n-1}\cdot(2^n-1)$ é perfeito.

Curiosidade: Euler provou que todos os números perfeitos pares são da forma acima e até hoje não se conseguiu descobrir nenhum número perfeito ímpar. Mas sabe-se que se um número perfeito ímpar existir, ele tem que ter pelo menos 101 fatores primos, escolhidos entre pelo menos 10 primos distintos, e que o maior dos fatores primos tem que ser maior que 10^8.