INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Lógica & Computabilidade 2025-2

Prova 1

3 de outubro de 2025

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Justifique todas as suas respostas!

Questão 1 (2 pontos)**.** Prove, usando árvore de avaliação, que para quaisquer fórmulas α, β, φ da LC, temos que

$$[(\alpha \to \varphi) \wedge (\beta \to \varphi)] \leftrightarrow [(\alpha \vee \beta) \to \varphi]$$

é uma tautologia.

Questão 2 (1,5 pontos)**.** Dadas fórmulas φ, β e símbolo proposicional p, seja

$$\varphi[p := \beta]$$

a fórmula resultante de substituir *todas* as ocorrências de p em φ por β. Dê uma definição recursiva para essa operação.

Questão 3. Nessa questão, considere a versão da Lógica de Conectivos que tem as fórmulas $\top$ (sempre verdadeira) e $\bot$ (sempre falsa). Atenção: $\top$ e $\bot$ são fórmulas mas **não são** símbolos proposicionais!

a (1,5 pontos). Prove que, pra qualquer fórmula φ da LC e qualquer símbolo proposicional p:

$$\varphi \vDash ((\varphi[p := \top]) \vee (\varphi[p := \bot]))$$

b (2 pontos). Prove que, pra quaisquer fórmulas $\varphi_{\text{esq}}, \varphi_{\text{dir}}$ da LC e qualquer símbolo proposicional p que **não ocorre** em φ_{dir}:

$$\text{se} \quad \varphi_{\text{esq}} \vDash \varphi_{\text{dir}} \quad \text{então} \quad ((\varphi_{\text{esq}}[p := \top]) \vee (\varphi_{\text{esq}}[p := \bot])) \vDash \varphi_{\text{dir}}$$

Dica: o Teorema da Concordância (visto em sala) diz que se um símbolo proposicional não ocorre em uma certa fórmula, então dois contextos que difiram apenas no valor de verdade do símbolo têm que concordar sobre o valor da fórmula!

c (2 pontos). Dada fórmula φ, seja $\mathsf{SP}(\varphi)$ o conjunto dos símbolos proposicionais que ocorrem em φ.

Prove que, pra quaisquer fórmulas $\varphi_{\text{esq}}, \varphi_{\text{dir}}$ da LC, se $\varphi_{\text{esq}} \vDash \varphi_{\text{dir}}$ então existe fórmula φ_{int} (chamada **interpolante** de $\varphi_{\text{esq}} \vDash \varphi_{\text{dir}}$) tal que

- $\mathsf{SP}(\varphi_{\text{int}}) \subseteq \mathsf{SP}(\varphi_{\text{esq}}) \cap \mathsf{SP}(\varphi_{\text{dir}})$,
- $\varphi_{\text{esq}} \vDash \varphi_{\text{int}}$, e
- $\varphi_{\text{int}} \vDash \varphi_{\text{dir}}$.

Dica: Indução na quantidade de símbolos proposicionais de φ_{esq} que **não ocorrem** em φ_{dir}.

d (1 ponto). Dê um interpolante para $\neg(p \vee q) \vDash p \to r$.