Lógica e Computabilidade 2025-2

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 2

As entregas podem ser feitas em duplas, mas lembre-se que
não poderá haver repetição de duplas em listas diferentes!
Entregue todas as questões marcadas com * até
10/11 às 20:00 (nova data)

Questão 1. Mostre que os seguintes "quantificadores generalizados" são expressíveis usando apenas os símbolos usuais da LPO vistos em aula, i.e., com os quantificadores $\forall$ e $\exists$. Assim, em cada caso, você deve encontrar uma fórmula da LPO comum, na mesma assinatura, que seja semanticamente equivalente à fórmula desejada.

Em toda esta questão, seja $n \geqslant 1$ um número natural qualquer.

a. $\exists^{\geqslant n} x\ \varphi$, cuja semântica é dada por

$$\mathcal{E}, i \vDash \exists^{\geqslant n} x\ \varphi$$
sse
existem pelo menos n elementos distintos $d \in \mathcal{E}.D$ tais que $\mathcal{E}, i[x := d] \vDash \varphi$

b. $\exists^{\leqslant n} x\ \varphi$, cuja semântica é dada por

$$\mathcal{E}, i \vDash \exists^{\leqslant n} x\ \varphi$$
sse
existem no máximo n elementos distintos $d \in \mathcal{E}.D$ tais que $\mathcal{E}, i[x := d] \vDash \varphi$

c. $\exists^{= n} x\ \varphi$, cuja semântica é dada por

$$\mathcal{E}, i \vDash \exists^{= n} x\ \varphi$$
sse
existem exatamente n elementos distintos $d \in \mathcal{E}.D$ tais que $\mathcal{E}, i[x := d] \vDash \varphi$

Questão 2. Considere uma assinatura com dois símbolos para relações: P (unário) e R (binário). Prove ou refute o que é afirmado em cada item abaixo. Se você quiser, pode (ou não) usar árvores de avaliação. Lembrete: nossos modelos sempre têm universos não vazios.

a. $P(x) \vDash P(x)$

b. $P(x) \vDash P(y)$

c. $P(x) \vDash \forall x\, P(x)$

d. $\forall x\, P(x) \vDash P(x)$

e. $\forall x\, P(x) \vDash \exists x\, P(x)$

f. $\exists x\, P(x) \vDash \forall x\, P(x)$

g. $\forall x\, \exists y\, (xRy) \vDash \exists x\, \forall y\, (xRy)$

h. $\exists x\, \forall y\, (xRy) \vDash \forall x\, \exists y\, (xRy)$

* **i.** $\vDash \exists x\, (P(x) \to \forall y\, (P(y)))$

j. $\varphi \vDash \forall x\, \varphi$

k. Se x não ocorre livre em φ, então $\varphi \vDash \forall x\, \varphi$

l. $\vDash \varphi$ se, e somente se, $\vDash \forall x\, \varphi$

Questão 3. Chamamos de *modelagem* o processo de formalizar (simbolizar) frases ou argumentos da linguagem natural para a LPO usando alguma assinatura apropriada. Deve-se indicar a correspondência entre os componentes da frase de linguagem natural e os símbolos da linguagem formal.

Por exemplo, para a frase "eu nunca como manga e bebo leite no mesmo dia", poderíamos ter:

Lingugem natural	Simbólico
eu como manga no dia x	$M(x)$
eu bebo leite no dia x	$L(x)$

também estipulando que as variáveis $x, y, z, \ldots$ correspondem a dias.

De acordo com essa correspondência, a frase dada cima pode ser modelada por

$$\forall x\, \neg(M(x) \wedge L(x)).$$

Cada frase pode ser modelada de diversas formas diferentes.

Dê modelagens para cada frase abaixo.

a. "Ninguém gosta de todo mundo", usando

Linguagem natural	Simbólico
x gosta de y	$G(x, y)$

*** b.** "Toda pessoa que tem um filho deveria ser carinhosa com ele", usando

Linguagem natural	Simbólico
x é pai de y	$P(x, y)$
x deveria ser carinhoso com y	$C(x, y)$

c. "Você consegue enganar algumas pessoas em alguns momentos, mas não consegue enganar todas as pessoas em todos os momentos", usando

Linguagem natural	Simbólico
x é uma pessoa	$P(x)$
x é um momento	$M(x)$
você consegue enganar x em y	$E(x, y)$

d. "Nem toda fruta é gostosa, algumas são, mas nenhuma fruta cítrica é", usando

Linguagem natural	Simbólico
x é gostosa	$G(x)$
x é cítrica	$C(x)$

***Questão 4.** Considere a assinatura que tem 1 símbolo para constante e e 1 símbolo para operação binária $*$.

Um *monoide* é uma estrutura para essa assinatura que satisfaz as seguintes duas sentenças:

$$\text{(associatividade)} \qquad \varphi_{\mathrm{a}} := \forall x \forall y \forall z \; [x * (y * z) = (x * y) * z]$$
$$\text{(elemento neutro)} \qquad \varphi_{\mathrm{e}} := \forall x \; [(x * e = x) \wedge (e * x = x)]$$

Usando árvore de avaliação prove que "o elemento neutro em qualquer monoide é único", ou seja, sendo

$$\psi := \forall f \left((\forall x \, [(x * f = x) \wedge (f * x = x)]) \to e = f \right)$$

<u>prove</u> que

$$\varphi_a, \varphi_e \;\vdash\; \psi$$

Questão 5. Considere a assinatura com igualdade, sem constantes, sem relações e com dois símbolos para operações binárias $\oplus$ e $\odot$. Seja $\mathcal{E}_\mathbb{N}$ e estrutura para essa assinatura com domínio $\mathbb{N}$, onde as operações são interpretadas respectivamente como soma e produto de naturais. Então a fórmula

$$\varphi : \quad x \oplus x = x$$

define o elemento 0 em $\mathcal{E}_\mathbb{N}$, pois de fato 0 é o único número natural que é o dobro de si próprio.

Dê definições em $\mathcal{E}_\mathbb{N}$ para os itens listados abaixo:

a. O elemento 1.

b. A propriedade "ser um número par"

c. A propriedade "ser um número quadrado perfeito".

* **d.** Para um dado natural n, a propriedade "ser um divisor de n".

* **e.** A propriedade "ser um número primo" (considere que 0 e 1 não são primos).

f. A relação binária "é o sucessor de".

* **g.** A relação binária "menor ou igual".

h. A relação ternária "está entre", i.e., a relação que vale para uma tripla (a, b, c) sse b fica entre (ou igual) a e c na reta numérica.

i. A relação quaternária "dividendo, divisor, quociente, resto", que vale para uma tupla (a, b, c, d) sse a divisão inteira de a por b tem quociente c e resto d.

Questão 6. Sejam $\mathcal{A}$ uma assinatura e $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ estruturas para $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{E}_0$ é uma *subestrutura* de $\mathcal{E}_1$ se

- o domínio $\mathcal{E}_0.D$ de $\mathcal{E}_0$ é um subconjunto do domínio $\mathcal{E}_1.D$ de $\mathcal{E}_1$, i.e.,

$$\mathcal{E}_0.D \subseteq \mathcal{E}_1.D$$

- para cada símbolo para constante c de $\mathcal{A}$, temos

$$\mathcal{E}_0.c = \mathcal{E}_1.c$$

- para cada símbolo para operação n-ária op de $\mathcal{A}$ e cada $d_0, \ldots, d_{n-1} \in \mathcal{E}_0.D$, temos

$$\mathcal{E}_0.\mathrm{op}(d_0, \ldots, d_{n-1}) = \mathcal{E}_1.\mathrm{op}(d_0, \ldots, d_{n-1})$$

- para cada símbolo para relação n-ária R de $\mathcal{A}$ e cada $d_0, \ldots, d_{n-1} \in \mathcal{E}_0.D$, temos

$$\mathcal{E}_0.R(d_0, \ldots, d_{n-1}) \text{ é verdadeira} \iff \mathcal{E}_1.R(d_0, \ldots, d_{n-1}) \text{ é verdadeira}$$

Suponha que $\mathcal{E}_0$ seja subsestrutura de $\mathcal{E}_1$ e seja φ uma fórmula da LPO na assinatura $\mathcal{A}$, sem ocorrências de quantificadores, e tal que $\exists x\, \varphi$ é uma sentença.

* **a.** Prove (sem usar a letra b) que se $\mathcal{E}_1 \vDash \forall x\, \varphi$ então $\mathcal{E}_0 \vDash \forall x\, \varphi$, mas que a recíproca não é necessariamente verdadeira.

b. Prove (sem usar a letra a) que se $\mathcal{E}_0 \vDash \exists x\, \varphi$ então $\mathcal{E}_1 \vDash \exists x\, \varphi$, mas que a recíproca não é necessariamente verdadeira.

Questão 7. Em cada item abaixo, defina uma assinatura e encontre uma sentença φ dessa assinatura com a propriedade desejada. Lembre-se de que você tem liberdade de colocar os símbolos que quiser na assinatura, podendo então usar φ para fazê-los "se comportarem" de alguma forma desejada em cada modelo.

Por exemplo, para "os modelos de φ têm exatamente 1 elemento", poderíamos ter uma assinatura vazia e fazer φ ser $\forall x\, \forall y\, (x = y)$.

a. Os modelos de φ têm universo infinito.

b. Os modelos de φ *não têm* universo finito de tamanho ímpar (ou seja, todo modelo tem universo infinito, ou finito de tamanho par).

* **c.** Para um dado $k \geqslant 1$ fixo: os modelos de φ são grafos (direcionados[a]) k-coloríveis[b].

d. Os modelos de φ são *torneios* (grafos direcionados, sem laços, tais que entre qualquer par de vértices distintos existe exatamente uma aresta direcionada)

e. Os modelos de φ são grafos direcionados acíclicos (*DAGs*).

Você pode usar o seguinte teorema que nós não provamos: um grafo direcionado é acíclico sse possui uma *ordenação topológica*, que é uma ordenação de seus vértices de maneira que, para toda aresta direcionada $u \to v$, temos que u vem antes de v na ordenação.

* **f.** Os modelos de φ são cografos (definição dada na Lista 1).

Você pode usar o seguinte teorema que nós não provamos: todo grafo que não possui P_4 como subgrafo induzido é um cografo.

g. Os modelos de φ são grupos abelianos.

[a] Aqui, *grafos direcionados* são compostos por um conjunto não-vazio de vértices e uma relação binária sobre eles (pensadas como *arestas direcionadas*). Não permitimos laços (i.e., nenhum vértice pode ter aresta para si próprio).

[b] Um grafo direcionado é k-colorível se existe um forma de colorir seus vértices usando no máximo k cores, de forma que vértices distintos vizinhos recebam cores distintas.

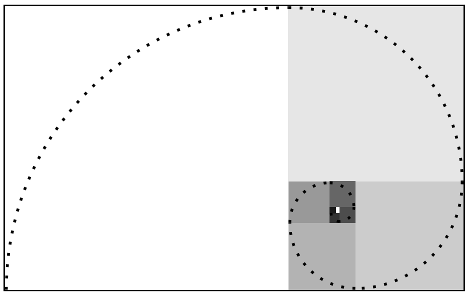
Questão 8. Seja $\mathcal{A}$ uma assinatura com um símbolo para constante u, com dois símbolos para operações binárias $\oplus$, $\odot$ e um símbolo para relação binária $\lhd$. Seja $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ a estrutura para essa assinatura que tem o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ como domínio e que interpreta u como 1, as operações $\oplus$, $\odot$ respectivamente como adição e multiplicação, e a relação $\lhd$ como "estritamente menor que".

* **a.** Prove que todo número inteiro é definível em $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$.
  Dica: não se preocupe em fazer uma definição "eficiente" ou "esperta"!

* **b.** Um número *racional* é um número que pode ser escrito como uma fração com numerador e denominador inteiros.
  Prove que todo racional é definível em $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$.

* **c.** *Lembrete*:

Como vimos em sala, A equação $x^2 = x + 1$ tem duas soluções reais; a maior delas é um número chamado *razão áurea.* Esse número é famoso pois, por exemplo, a sua n-ésima potência se aproxima do n-ésimo número de Fibonacci conforme $n \to \infty$, e também por supostamente ser "agradável" para os olhos: a razão áurea é a proporção do retângulo do qual, se retirarmos do "canto" do retângulo um quadrado de lado igual ao menor lado do retângulo, o retângulo restante tem a mesma proporção do original:



Como vimos em sala, a razão áurea é definível, por exemplo, usando a fórmula

$$(0 \triangleleft x) \wedge (x \odot x = x \oplus u)$$

pois a razão áurea é a *única* solução <u>positiva</u> da equação $x^2 = x = 1$.

<u>Prove</u> que, para qualquer polinômio p com coeficientes racionais, temos que *qualquer* raiz real de p é definível em $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$. *Lembrete*: uma *raiz real* de um polinômio p é um número real r tal que $p(r) = 0$.

Dica: primeiro mostre que a *maior* raiz de p é definível, depois que a *segunda maior* raiz também é definível, etc.