Teoria de Categorias & Programação Funcional 2025-1

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 1

As entregas podem ser feitas em duplas, mas lembre-se que
não poderá haver repetição de duplas em listas diferentes!
Entregue todas as questões marcadas com * até
13/5 às 20:00

Questão 1. Como vimos em aula, intuitivamente, se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias, então "apenas colocar cópias de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ lado a lado, sem interações entre elas" também parece ser uma categoria.

Dê uma descrição precisa dessa construção e prove que o resultado de fato é uma categoria. Para facilitar, você pode assumir que os objetos e setas de $\mathcal{C}$ não aparecem em $\mathcal{D}$ (i.e., as categorias são completamente "disjuntas").

Questão 2. Se uma categoria tem exatamente n objetos...

a. existe uma quantidade *mínima* de setas que ela deve ter?

b. existe uma quantidade *máxima* de setas que ela pode ter?

Questão 3. Um *monoide* é uma estrutura $(M, *, e)$ de assinatura "1 universo, 1 operação binária, 1 constante", satisfazendo os seguintes axiomas:

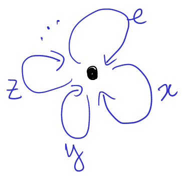
- "associatividade": $(x * y) * z = x * (y * z)$
- "elemento neutro": $x * e = x = e * x$

a. Dê a definição de "homomorfismo de monoides".

b. Agora seja $(M, *, e)$ um monoide qualquer. Prove que a seguinte especificação é uma categoria:

- Objetos: apenas um, $\bullet$
- Setas: os elementos de M
- dom, cod: funções constantes com saída $\bullet$ para qualquer entrada
- $\mathrm{id}(\bullet) =$ o elemento neutro e do monoide
- composta: a operação $*$ do monoide

$M = \{e, x, y, z, \ldots\}$



c. Agora seja $\mathcal{C}$ uma categoria qualquer. Prove que, para qualquer objeto X de $\mathcal{C}$, temos que $(M, *, e)$ é um monoide, onde

$$\begin{aligned} M &= \text{coleção das setas de } \mathcal{C} \text{ com domínio e contradomínio } X \\ * &= \text{a composta de } \mathcal{C} \text{ restrita a } M \\ e &= \text{a identidade de } X \text{ em } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

* **d.** Prove que homomorfismos entre monoides (vistos da forma usual) "são o mesmo" que funtores entre os monoides vistos como categorias (como descrito no item (b)): pode-se fazer cada homomorfismo corresponder a exatamente um funtor, e cada funtor também corresponder a exatamente um homomorfismo, de maneira que essas correspondências sejam inversas uma da outra (partindo de um homomorfismo, indo para o funtor correspondente, e depois para o homomorfismo correspondente a esse, volta-se ao homomorfismo original, e analogamente começando-se em um funtor).

***Questão 4.** Seja $\mathsf{Set}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{inj}}$ a categoria onde os objetos são os conjuntos <u>finitos</u>, as setas são as funções <u>injetivas</u> entre conjuntos finitos, e o restante como usual para funções.

Seja também $\mathsf{Nat}_{\leqslant}$ a categoria "poset" definida a partir dos números naturais e sua ordem $\leqslant$ usual [lembrete: os objetos são os naturais, e entre cada par de naturais n, m colocamos uma seta sse[a] $n \leqslant m$].

Definimos um funtor $F :: \mathsf{Set}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{inj}} \to \mathsf{Nat}_{\leqslant}$ da seguinte forma: para cada objeto X de $\mathsf{Set}^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{inj}}$, definimos $F(X) :=$ a quantidade de elementos de X. Complete a definição e prove que o resultado é de fato um funtor.

[a] se, e somente se

***Questão 5** (“Funtor preimagem”)**.** Prove que a seguinte definição é um funtor. Definimos $\wp^{\mathrm{pre}} :: \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$ da seguinte forma.

- Dado um objeto X da categoria Set, definimos

$$\wp^{\mathrm{pre}}(X) := \wp(X) = \text{conjunto das partes de } X$$

- Dada uma seta $f :: X \to Y$ da categoria Set, temos que definir uma seta

$$\wp^{\mathrm{pre}}(f) :: \wp^{\mathrm{pre}}(X) \to \wp^{\mathrm{pre}}(Y),$$

na categoria $\mathsf{Set}^{\mathrm{op}}$, o que é a mesma coisa que uma seta

$$\wp^{\mathrm{pre}}(f) :: \wp^{\mathrm{pre}}(Y) \to \wp^{\mathrm{pre}}(X),$$

na categoria Set.

Em outras palavras, precisamos definir uma **função** de $\wp(Y)$ para $\wp(X)$! Fazemos isso definindo, para cada $A \in \wp(Y)$:

$$\begin{aligned}(\wp^{\mathrm{pre}}(f))(A) := f^{-1}[A] = \{x \in X \ ; \ f(x) \in A\} \\ = \text{“a pré-imagem de } A \text{ por } f\text{”}.\end{aligned}$$

Questão 6 (Subestruturas)**.** Dadas duas estruturas $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$ de uma mesma assinatura, dizemos que $\mathfrak{M}$ é uma *subestrutura* de $\mathfrak{N}$ se:

- Para cada universo U na assinatura, a sua interpretação $U_{\mathfrak{M}}$ em $\mathfrak{M}$ é um subconjunto da interpretação $U_{\mathfrak{N}}$ em $\mathfrak{N}$.

$$\text{para todo universo } U \text{ na assinatura:} \qquad U_{\mathfrak{M}} \subseteq U_{\mathfrak{N}}$$

- para cada operação na assinatura, realizar a operação em elementos de $\mathfrak{M}$ de acordo com a interpretação de $\mathfrak{M}$ para a operação dá no mesmo que operar os mesmos elementos, mas usando a interpretação de $\mathfrak{N}$ para a operação.

$$\text{para toda operação op na assinatura e todos } x, y, \ldots, z \text{ em } \mathfrak{M}\text{:} \qquad \mathrm{op}_{\mathfrak{M}}(x, y, \ldots, z) = \mathrm{op}_{\mathfrak{N}}(x, y, \ldots, z)$$

- para cada relação na assinatura, e para quaisquer elementos de $\mathfrak{M}$, se esses elementos estão relacionados de acordo com a interpretação de $\mathfrak{M}$ para a relação, então o mesmo vale se usarmos a interpretação de $\mathfrak{N}$ para a relação.

para toda relação R na assinatura:

se $x, y, \ldots, z$ estão relacionados de acordo com $\mathrm{R}_{\mathfrak{M}}$

então $x, y, \ldots, z$ estão relacionados de acordo com $\mathrm{R}_{\mathfrak{N}}$

- para cada constante na assinatura, as interpretações de $\mathfrak{M}$ e de $\mathfrak{N}$ para a constante coincidem.

$$\text{para toda constante } c \text{ na assinatura:} \qquad c_{\mathfrak{M}} = c_{\mathfrak{N}}$$

Por exemplo, um monoide $(M, *, e)$ é uma subestrutura (nesse caso, um "submonoide") de um outro monoide $(N, \#, f)$ quando:

- cada elemento de M é também um elemento de N
- para todos $x, y \in M$, temos $x * y \;\; = \;\; x \# y$
- temos $e = f$.

Assim o monoide $(\mathbb{N}, \times, 1)$ é um submonoide de $(\mathbb{R}, \times, 1)$, mas não é um submonoide de $(\mathbb{N}, +, 0)$.

a. Dê a definição "por extenso" da noção de quando uma categoria é subestrutura de outra.

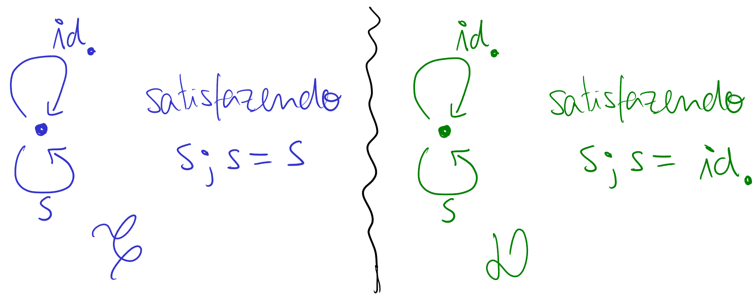
* **b.** Dados conjuntos X e Y, se $X \subseteq Y$ então chamamos de *inclusão* a função $\mathrm{inc} :: X \to Y$ definida por $\mathrm{inc}(x) := x$ para todo $x \in X$.

Assim, a única diferença entre inclusão e (função) identidade é que na identidade o domínio e contradomínio devem ser os mesmos, mas isso não precisa ser verdade para a inclusão.

Prove que uma estrutura é subestrutura de outra sse[a] o mapa formado por inclusões para todos os universos da assinatura é um homomorfismo entre as estruturas.

[a] "se, e somente se"

Questão 7. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ as categorias da figura abaixo:



Note que a única diferença entre as categorias é na definição de composta.

* **a.** Quantos funtores há de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$?

b. Dê uma explicação "intuitiva" (informal, porém clara) do que devem ser funtores de $\mathcal{C}$ para Set e de $\mathcal{D}$ para Set.

c. Dê dois exemplos diferentes de funtores de $\mathcal{C}$ para Set

* **d.** Dê dois exemplos diferentes de funtores de $\mathcal{D}$ para Set

Questão 8. Prove ou refute:

a. De qualquer categoria para qualquer categoria sempre existe pelo menos um funtor.

b. Dadas quaisquer categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, se $\mathcal{D}$ tem pelo menos um objeto então existe pelo menos um funtor de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$.

Questão 9. Seja $G = (V, A)$ um grafo direcionado e considere a categoria "vértices e passeios" construída a partir de G como visto em sala.

Prove que os únicos isomorfismos desta categoria são as setas identidade de cada objeto.

Questão 10. Prove que os seguintes pares de objetos nas categorias dadas são isomorfos:

* **a.** Em Cat, a categoria poset dos naturais divisores de 30 com a relação de divisibilidade, e a categoria poset dos subconjuntos de $\{0, 1, 2\}$ com a relação de subconjunto.

b. Em Mon, o monoide das palavras finitas de um alfabeto de 1 letra com a operação de concatenação e constante "palavra-vazia", e o monoide dos naturais com operação de soma e constante 0.

* **c.** Em Mon, o monoide dos números reais com operação de soma e constante 0, e o monoide dos números reais estritamente positivos, com operação de multiplicação e constante 1.

d. Em Set, o conjunto $\wp(\mathbb{N})$ [o conjunto das partes de $\mathbb{N}$, i.e., o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$] e o conjunto de todas as sequências infinitas de 0s e 1s, i.e., o conjunto de todas as funções $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$.