



INSTITUTO DE
COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Lógica & Computabilidade 2025-1

Segunda Chamada da Prova 2

18 de julho de 2025

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Justifique todas as suas respostas!

Nessa prova, assuma como verdadeiro o seguinte:

Teorema (Corretude e Completude da LPO). $\Sigma \models \varphi \iff \Sigma \vdash \varphi$

Outro lembrete:

Definição. Dizemos que um conjunto Σ de fórmulas da LPO em alguma assinatura é *satisfazível* se existem uma estrutura $\mathcal{E}$ da assinatura e uma atribuição a para essa estrutura tal que $\mathcal{E}, a$ torna todas as fórmulas em Σ verdadeiras simultaneamente.

Questão 1. Sejam α, β fórmulas tais que a variável x não ocorra livremente em β . Prove que:

a (1,75 pontos). $\forall x (\alpha \rightarrow \beta) \vdash (\exists x \alpha) \rightarrow \beta$

b (1,75 pontos). $(\exists x \alpha) \rightarrow \beta \vdash \forall x (\alpha \rightarrow \beta)$

Questão 2 (2,5 pontos). Prove o seguinte teorema:

Teorema (Compacidade). Σ é satisfazível se, e somente se, todo subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ é satisfazível.

Dica: na “volta”, experimente provar a contrapositiva, usando o Teorema da Completude aliado ao fato de que Σ é insatisfazível sse $\Sigma \models \psi$ para alguma fórmula contraditória ψ (não precisa provar esse fato). Lembre-se que o símbolo $\vdash$ é usado quando uma certa árvore fecha—o que isso tem a ver com “finitude”?

Questão 3. Considere a assinatura que tem

- símbolos para operações binárias $\oplus$ e $\odot$
- um símbolo para relação binária $\triangleleft$
- para cada número natural n , um símbolo para constante c_n

Seja $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ a estrutura para essa assinatura que tem como domínio o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, onde $\oplus$, $\odot$ e $\triangleleft$ são interpretadas respectivamente como adição, multiplicação e “estritamente menor que”, e onde cada c_n é interpretada como o natural n . Finalmente, seja $\mathbf{S}$ o conjunto de todas as sentenças dessa assinatura que são verdadeiras na estrutura $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$.

Por exemplo, as seguintes sentenças

$$\begin{aligned} &\forall x [c_1 \neq x \rightarrow \neg \exists y (x \odot y = c_1)] \\ &\forall x \forall y [(x \triangleleft y) \vee (x = y) \vee (y \triangleleft x)] \end{aligned}$$

estão em $\mathbf{S}$, mas a seguinte sentença não está:

$$\exists x \forall y (y \triangleleft x)$$

pois não existe um número natural maior que todos os outros.

a (1,75 pontos). Seja Σ o seguinte conjunto de fórmulas

$$\Sigma = \mathbf{S} \cup \{c_n \triangleleft x \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Note que algumas das fórmulas em Σ são sentenças, e outras têm a variável x livre.

Prove que Σ não é “satisfazível em $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ ”: não existe atribuição a para $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ tal que $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}, a$ satisfaça todas as fórmulas em Σ simultaneamente.

b (2,25 pontos). Prove que Σ é satisfazível.

Dica: Use o Teorema da Compacidade :)