INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza

Lógica & Computabilidade 2025-1

Prova 2

4 de julho de 2025

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Justifique todas as suas respostas!

Questão 1. Nesta questão, considere a assinatura $\mathcal{A}$ que tem apenas um símbolo para relação binária R, chamada "assinatura da teoria dos conjuntos" (pois podemos **informalmente** considerar que R é a relação "pertence", mas formalmente isso não está determinado pela assinatura).

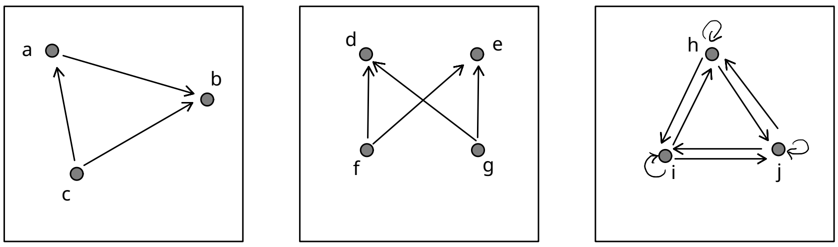
Uma estrutura $\mathcal{E}$ para essa assinatura pode ser representada graficamente por uma figura onde cada elemento do universo é um ponto, e onde a relação é indicada usando setas (um ponto a aponta para um ponto b sse a está relacionado com b pela relação $R^{\mathcal{E}}$).

a (1,25 pontos)**.** *Extensionalidade* é a propriedade que uma estrutura para $\mathcal{A}$ pode ter (ou não), que diz (informalmente) "*objetos diferentes têm elementos diferentes*".

Formalmente, uma estrutura para $\mathcal{A}$ é *extensional* se satisfaz a sentença

$$\forall x \forall y \; [x \neq y \;\rightarrow\; \exists z \, (zRx \not\leftrightarrow zRy)]$$

Dentre as estruturas abaixo, determine quais são extensionais.



$\mathcal{E}_0$ $\mathcal{E}_1$ $\mathcal{E}_2$

b (1,25 pontos)**.** Lembrete: um conjunto A é *subconjunto* de um conjunto B se todo elemento de A é também elemento de B. Portanto, na assinatura $\mathcal{A}$, a relação de subconjunto pode ser definida pela fórmula

$$\varphi_{\subseteq} \quad := \quad \forall z\, (zRx \to zRy),$$

pois em uma dada estrutura $\mathcal{E}$ com atribuição a, temos $\mathcal{E}, a \vDash \varphi_{\subseteq}$ sse $a(x)$ é um "subconjunto" de $a(y)$ (no sentido que todo elemento $R^{\mathcal{E}}$-relacionado com $a(x)$ está também $R^{\mathcal{E}}$-relacionado com $a(y)$).

Encontre elementos v, w em alguma das estruturas $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ acima tais que v é subconjunto de w.

c (1,25 pontos)**.** Dizemos que um conjunto P é o *conjunto das partes* de um conjunto A se os elementos de P são exatamente os subconjuntos de A.

Dê uma fórmula da assinatura $\mathcal{A}$ que defina a relação "ser o conjunto das partes de".

d (1,25 pontos)**.** Encontre elementos v, w em alguma das estruturas $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ acima tais que v é o conjunto das partes de w.

Questão 2. Usando árvores de avaliação, prove que

a (2,5 pontos)**.** $\exists x\, (\varphi \to \psi) \quad \vdash \quad [(\forall x\, \varphi) \to (\exists x\, \psi)]$

b (2,5 pontos)**.** $[(\forall x\, \varphi) \to (\exists x\, \psi)] \quad \vdash \quad \exists x\, (\varphi \to \psi)$