



Lógica & Computabilidade 2025-1

Prova 1

30 de maio de 2025

Você pode usar tudo que foi feito em sala ou listas de exercícios; apenas cite claramente quando o fizer. Você também pode usar uma questão da prova na solução de outra, desde que não crie dependências circulares.

Justifique todas as suas respostas!

Questão 1. Prove, usando árvores de avaliação:

a (1,5 ponto). $\varphi \rightarrow \psi \vdash (\psi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \alpha)$

b (1,5 ponto). $\varphi \rightarrow \psi \not\vdash (\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\psi \rightarrow \alpha)$

Questão 2 (2 pontos).

Definição. Um conjunto Σ de fórmulas é dito

- *consistente* se não tem como consequência sintática nenhuma fórmula contraditória (falsa em todos os contextos), i.e., se para toda fórmula contraditória φ temos

$$\Sigma \not\vdash \varphi$$

- *cheio* se para toda fórmula φ da LC temos $\varphi \in \Sigma$ ou $(\neg\varphi) \in \Sigma$.

Assuma (sem prova) o seguinte resultado.

Teorema (Lema de Lindenbaum). *Se Σ é um conjunto consistente de fórmulas, então Σ está contido em algum conjunto de fórmulas que é consistente e cheio.*

Prove que, se Σ é consistente, então Σ é satisfazível (i.e., existe algum contexto que satisfaz todas as fórmulas de Σ).

Dica: pelo Lema de Lindenbaum, Σ está contido em algum conjunto Δ que é consistente e cheio. Use essas propriedades para definir um contexto que satisfaz todo o Δ , e portanto também todo o Σ .

Questão 3.

Definição. Sejam $\star$ um conectivo n -ário e $i < n$. Dizemos que:

$\star$ é **tipo S na posição i** se para qualquer contexto c temos, para quaisquer fórmulas $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$:

$$c(\star(\varphi_0, \dots, \varphi_n)) \neq c(\star(\varphi_0, \dots, \varphi_{i-1}, \neg\varphi_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n))$$

(S vem de “Sempre afeta”)

$\star$ é **tipo N na posição i** se para qualquer contexto c temos, para quaisquer fórmulas $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$:

$$c(\star(\varphi_0, \dots, \varphi_n)) = c(\star(\varphi_0, \dots, \varphi_{i-1}, \neg\varphi_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n))$$

(N vem de “Nunca afeta”)

$\star$ é **afim** se, em cada uma de suas posições, $\star$ é tipo S ou N.

a (2 pontos). Dentre os conectivos $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$, prove quais são e quais não são afins.

b (2 pontos). Suponha que $\star, \square, \bullet, \circ$ sejam conectivos binários tais que para todas fórmulas α e β tenhamos que

$$\alpha \star \beta \quad \text{é semanticamente equivalente a} \quad (\alpha \bullet \beta) \square (\alpha \circ \beta)$$

Prove que se $\square, \bullet, \circ$ são afins, então $\star$ também é.

c (1 ponto). Prove que um conjunto composto apenas de conectivos binários afins não pode ser completo.