Lógica e Computabilidade 2025-1

Hugo Nobrega

Lista de Exercícios 2

As entregas podem ser feitas em duplas, mas lembre-se que
não poderá haver repetição de duplas em listas diferentes!
Entregue todas as questões marcadas com * até
30 de junho às 20:00.

Questão 1. Considere uma assinatura com dois símbolos para relações: P (unário) e R (binário). Prove ou refute o que é afirmado em cada item abaixo. Lembrete: nossos modelos sempre têm universos não vazios.

a. $P(x) \vDash P(x)$

* **b.** $P(x) \vDash P(y)$

c. $P(x) \vDash \forall x\, P(x)$

d. $\forall x\, P(x) \vDash P(x)$

e. $\forall x\, P(x) \vDash \exists x\, P(x)$

f. $\exists x\, P(x) \vDash \forall x\, P(x)$

* **g.** $\forall x\, \exists y\, (xRy) \vDash \exists x\, \forall y\, (xRy)$

h. $\exists x\, \forall y\, (xRy) \vDash \forall x\, \exists y\, (xRy)$

i. $\vDash \exists x\, (P(x) \to \forall y\, (P(y)))$

j. $\varphi \vDash \forall x\, \varphi$

* **k.** Se x não ocorre livre em φ, então $\varphi \vDash \forall x\, \varphi$

l. $\vDash \varphi$ se, e somente se, $\vDash \forall x\, \varphi$

Questão 2. Chamamos de *modelagem* o processo de formalizar (simbolizar) frases ou argumentos da linguagem natural para a LPO usando alguma assinatura apropriada. Deve-se indicar a correspondência entre os componentes da frase de linguagem natural e os símbolos da linguagem formal.

Por exemplo, para a frase “eu nunca como manga e bebo leite no mesmo dia”, poderíamos ter:

Lingugem natural	Simbólico
eu como manga no dia x	$M(x)$
eu bebo leite no dia x	$L(x)$

também estipulando que as variáveis $x, y, z, \ldots$ correspondem a dias.

De acordo com essa correspondência, a frase dada cima pode ser modelada por

$$\forall x\, \neg(M(x) \wedge L(x)).$$

Cada frase pode ser modelada de diversas formas diferentes.

Dê modelagens para cada frase abaixo.

a. "Ninguém gosta de todo mundo", usando

Linguagem natural	Simbólico
x gosta de y	$G(x, y)$

*** b.** "Toda pessoa que tem um filho deveria ser carinhosa com ele", usando

Linguagem natural	Simbólico
x é pai de y	$P(x, y)$
x deveria ser carinhoso com y	$C(x, y)$

c. "Você consegue enganar algumas pessoas em alguns momentos, mas não consegue enganar todas as pessoas em todos os momentos", usando

Linguagem natural	Simbólico
x é uma pessoa	$P(x)$
x é um momento	$M(x)$
você consegue enganar x em y	$E(x, y)$

d. "Nem toda fruta é gostosa, algumas são, mas nenhuma fruta cítrica é", usando

Linguagem natural	Simbólico
x é gostosa	$G(x)$
x é cítrica	$C(x)$

Questão 3. Em cada item abaixo, defina uma assinatura e encontre uma sentença φ dessa assinatura com a propriedade desejada. Lembre-se de que você tem liberdade de colocar os símbolos que quiser na assinatura, podendo então usar φ para fazê-los "se comportarem" de alguma forma desejada em cada modelo.

Por exemplo, para "os modelos de φ têm exatamente 1 elemento", poderíamos ter uma assinatura vazia e fazer φ ser $\forall x\, \forall y\, (x = y)$.

a. Para um dado $k \geqslant 1$ fixo: os modelos de φ são grafos (direcionados[1]) k-coloríveis[2].

* **b.** Os modelos de φ são *torneios* (grafos direcionados, sem laços, tais que entre qualquer par de vértices distintos existe exatamente uma aresta direcionada)

c. Os modelos de φ são grafos direcionados acíclicos (*DAGs*).

Você pode usar o seguinte teorema que nós não provamos: um grafo direcionado é acíclico sse possui uma *ordenação topológica*, que é uma ordenação de seus vértices de maneira que, para toda aresta direcionada $u \to v$, temos que u vem antes de v na ordenação.

d. Os modelos de φ são cografos (definição dada na Lista 1).

Você pode usar o seguinte teorema que nós não provamos: todo grafo que não possui P_4 como subgrafo induzido é um cografo.

e. Os modelos de φ são grupos abelianos.

* **f.** Os modelos de φ têm exatamente n elementos, sendo $n \geqslant 2$ um número natural qualquer.

g. Os modelos de φ não podem ser finitos de tamanho ímpar (ou seja, podem ser infinitos, ou finitos de tamanho par apenas).

* **h.** Os modelos de φ são infinitos.

Questão 4. Sejam $\mathcal{A}$ uma assinatura e $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ estruturas para $\mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{E}_0$ é uma *subestrutura* de $\mathcal{E}_1$ se

- o domínio $D(\mathcal{E}_0)$ de $\mathcal{E}_0$ é um subconjunto do domínio $D(\mathcal{E}_1)$ de $\mathcal{E}_1$, i.e.,
$$D(\mathcal{E}_0) \subseteq D(\mathcal{E}_1)$$
- para cada símbolo para constante c de $\mathcal{A}$, temos
$$c^{\mathcal{E}_0} = c^{\mathcal{E}_1}$$
- para cada símbolo para operação n-ária op de $\mathcal{A}$ e cada $d_0, \ldots, d_{n-1} \in D(\mathcal{E}_0)$, temos
$$\mathrm{op}^{\mathcal{E}_0}(d_0, \ldots, d_{n-1}) = \mathrm{op}^{\mathcal{E}_1}(d_0, \ldots, d_{n-1})$$
- para cada símbolo para relação n-ária R de $\mathcal{A}$ e cada $d_0, \ldots, d_{n-1} \in D(\mathcal{E}_0)$, temos

[1]Aqui, *grafos direcionados* são compostos por um conjunto não-vazio de vértices e uma relação binária sobre eles. Permitimos laços (i.e., qualquer vértice *pode* ter uma aresta para si próprio).

[2]Um grafo direcionado é k-colorível se existe um forma de colorir seus vértices usando no máximo k cores, de forma que vértices distintos vizinhos recebam cores distintas.

$$R^{\mathcal{E}_0}(d_0, \dots, d_{n-1}) \text{ é verdadeira} \iff R^{\mathcal{E}_1}(d_0, \dots, d_{n-1}) \text{ é verdadeira}$$

Suponha que $\mathcal{E}_0$ seja subsestrutura de $\mathcal{E}_1$ e seja φ uma fórmula da LPO na assinatura $\mathcal{A}$, sem ocorrências de quantificadores, e tal que $\exists x\, \varphi$ é uma sentença.

Prove que se $\mathcal{E}_0 \vDash \exists x\, \varphi$ então $\mathcal{E}_1 \vDash \exists x\, \varphi$, mas que a recíproca não é necessariamente verdadeira.

Questão 5. Seja $\mathcal{A}$ uma assinatura com um símbolo para constante u, com dois símbolos para operações binárias $\oplus$, $\odot$ e um símbolo para relação binária $\lhd$. Seja $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ a estrutura para essa assinatura que tem o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ como domínio e que interpreta u como 1, as operações $\oplus$, $\odot$ respectivamente como adição e multiplicação, e a relação $\lhd$ como "estritamente menor que".

*** a.** Prove que todo número inteiro é definível em $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$.
Dica: não se preocupe em fazer uma definição "eficiente" ou "esperta"!

*** b.** Um número *racional* é um número que pode ser escrito como uma fração com numerador e denominador inteiros.
Prove que todo racional é definível em $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$.

*** c.** Prove que *qualquer* raiz[3] de polinômio com coeficientes racionais é definível em $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$.
Dica: primeiro mostre que a *maior* raiz de um dado polinômio com coeficientes racionais é definível, depois que a *segunda maior* raiz também é definível, etc.

Questão 6. Mostre que os seguintes "quantificadores generalizados" são expressíveis usando apenas os símbolos lógicos usuais (conectivos, quantificadores e igualdade) da LPO vistos em aula.

Assim, em cada caso, você deve encontrar uma fórmula da LPO comum, na mesma assinatura, que seja semanticamente equivalente à fórmula desejada.

Em toda esta questão, seja $n \geqslant 1$ um número natural qualquer.

a. $\exists^{\geqslant n} x\, \varphi$, cuja semântica é dada por

$$\mathcal{E}, a \vDash \exists^{\geqslant n} x\, \varphi$$

sse

existem pelo menos n elementos distintos $d \in D(\mathcal{E})$ tais que $\mathcal{E}, a[x \leftarrow d] \vDash \varphi$

b. $\exists^{\leqslant n} x\, \varphi$, cuja semântica é dada por

$$\mathcal{E}, a \vDash \exists^{\leqslant n} x\, \varphi$$

sse

existem no máximo n elementos distintos $d \in D(\mathcal{E})$ tais que $\mathcal{E}, a[x \leftarrow d] \vDash \varphi$

[3] *Lembrete*: uma *raiz* de um polinômio p é um número r tal que $p(r) = 0$.

c. $\exists^{=n} x\ \varphi$, cuja semântica é dada por

$$\mathcal{E}, a \vDash \exists^{=n} x\ \varphi$$
$$\text{sse}$$
$$\text{existem exatamente } n \text{ elementos distintos } d \in D(\mathcal{E}) \text{ tais que } \mathcal{E}, a[x \leftarrow d] \vDash \varphi$$

***Questão 7.** Prove que $\varphi, \psi \vdash \beta$, onde

$$\varphi := \forall x\ [(F(x) \land G(x)) \to H(x)] \quad \to \quad \exists x\ [F(x) \land (\neg G(x))]$$
$$\psi := \forall x\ [F(x) \to G(x)] \quad \lor \quad \forall x\ [F(x) \to H(x)]$$
$$\beta := \forall x\ [(F(x) \land H(x)) \to G(x)] \quad \to \quad \exists x\ [\langle F(x) \land G(x) \rangle \land \neg H(x)]$$